

P1 1. Cualquier matriz de 2×2 se puede escribir como:

$$\hat{\rho} = A\mathbb{I} + \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$$

Pero se tiene que $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$

$$\Rightarrow \text{tr}(A\mathbb{I}) + \text{tr}(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = 1$$

$$\rightarrow \text{tr}(\sigma_i) = 0 \Rightarrow \text{tr}(A\mathbb{I}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = 1/2 ; \text{ Tomando } \vec{m} = 2\vec{B}$$

$$\Rightarrow \hat{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{m} \cdot \vec{\sigma})$$

2. Tomando $k_B = 1$:

$$S_{VN} = -\text{tr}(\hat{\rho} \ln(\hat{\rho}))$$

λ_i, λ_i son los autovalores de $\hat{\rho}$

$$\Rightarrow S_{VN} = -\sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \pm \frac{|\vec{m}|}{2}$$

$$\Rightarrow S_{VN} = -\left(\left[\frac{1+|\vec{m}|}{2} \right] \ln\left(\frac{1+|\vec{m}|}{2} \right) + \left[\frac{1-|\vec{m}|}{2} \right] \ln\left(\frac{1-|\vec{m}|}{2} \right) \right)$$

3. Estado puro $\Rightarrow \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$

$$\Rightarrow \hat{\rho}^2 = \frac{1}{4} \left(\mathbb{I} + 2m_i \sigma^i + m_i m_j \sigma^i \sigma^j \right)$$

Donde $m_i \sigma^i = \sum_i m_i \sigma^i$.

Se tiene que $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{I} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$

$$\Rightarrow \hat{\rho}^2 = \frac{1}{4} \left(\mathbb{I} + m_i m_i \mathbb{I} + 2m_i \sigma^i + i m_i m_j \epsilon^{ijk} \sigma^k \right)$$

Como $\text{Tr}(\sigma^i) = 0$

$$\Rightarrow \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \frac{1}{4} (2 + 2|\vec{m}|^2 + 0 + 0)$$

$$= \frac{1 + |\vec{m}|^2}{2} \Rightarrow |\vec{m}|^2 = 1 \Rightarrow |\vec{m}| = 1$$

$\rightarrow S_{VN}(|\vec{m}|=1) = -1 \cdot \ln(1) = 0 \rightarrow$ Mínima entropía posible de un estado cuántico.

4. $H = \vec{\sigma} \cdot \vec{h} = \sigma_i h_i \rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = i [\hat{\rho}, H]$

$$= \frac{i}{2} [\mathbb{I} + m_i \sigma^i, \sigma_j h_j] = \frac{i}{2} [m_i \sigma^i, \sigma_j h_j]$$

$$= \frac{i}{2} [\sigma^i, \sigma_j] m_i h_j = \frac{i}{2} [\sigma^i, \sigma^j] m_i h_j$$

$$= \frac{i m_i h_j}{2} (2i \epsilon_{ijk} \sigma^k) ; m_i h_j \epsilon_{ijk} = (\vec{m} \times \vec{h})_k$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -(\vec{m} \times \vec{h})_k \sigma^k = -(\vec{m} \times \vec{h}) \cdot \vec{\sigma}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\vec{m}} \cdot \vec{\sigma} = (\vec{n} \times \vec{m}) \cdot \vec{\sigma} \quad / \cdot \vec{\sigma}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec{m}} = -2 (\vec{n} \times \vec{m}) \rightarrow E_c. \text{ de Landau-Lifshitz.}$$