Tarea 3

Fecha de entrega: 07 de Septiembre

Profesor: Felipe Barra De La Guarda
Auxiliar: Matías Araya Satriani
Ayudantes: Astor Sandoval Parra

P1. Paradoja de Gibbs

Considere un gas ideal con energía U, volumen V y cantidad de partículas N de masa m cada una. Calcule la entropía asociada a este gas considerando que las partículas son distinguibles, muestre que esta entropía no es extensiva. Ahora considere que las partículas son indistinguibles y calcule la entropía, muestre que esta entropía es extensiva.

Indicación: Para representar un estado del gas es necesario considerar la posición y momentum de cada partícula, entregando un espacio de fase de tamaño $6N$. Un problema que encontrará es que el número de estados asociados al momentum (de tamaño $3N$) es infinitamente grande, para solucionar esto discretice el espacio de fase asociado al momentum en volúmenes de tamaño h^{3N} y calcule los estados, donde h es una constante pequeña pero finita. ¿Qué rol podría atribuirle a h en relación a la mecánica cuántica?

P2. Modelo de Ising (de nuevo)

El modelo de Ising es un modelo físico usado para la explicación de diversos fenómenos. En su versión más común el modelo se trata de un sistema magnético. Consideremos el modelo unidimensional. Imagine $N \gg 1$ spines equiespaciados en una circunferencia (condición de borde periódica), cada uno de los cuales puede tener dos estados, $\sigma_i = \pm 1$. La energía en el modelo de Ising en ausencia de campos magnéticos externos es simplemente:

$$E = -\sum_{\langle ij \rangle} J\sigma_i\sigma_j \qquad (1)$$

donde $\sum_{\langle ij \rangle}$ es una suma a primeros vecinos, es decir; al tomar un spin, la energía que aporta al sistema depende de los spines inmediatamente vecinos. Asuma a continuación que $J > 0$. De esta forma el estado basal tiene degeneración dos y corresponde a todos los spines orientados de igual forma, ya sea $+1$ o -1.

1. Encuentre la energía, la forma y degeneración del primer estado excitado.
2. Encuentre la entropía $S(E)$ en función de la energía E de la cadena de spines.
3. Haga un gráfico de $S(E)$ en todo el rango permitido de energías y, sin calcular, indique donde la temperatura es:
   a) Cero.

b) Positiva.

c) Negativa.

d) $+\infty$.

e) $-\infty$.

4. Encuentre la energía del sistema en función de la temperatura $E(T)$.

5. Encuentre el calor específico, C, del sistema en función de la temperatura.

6. Grafique C vs T. Comente sobre el origen físico de las principales características del gráfico.

Matriz de densidad

Considere un sistema descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \sigma_x + \sigma_z \tag{2}$$

Donde σ_x, σ_z son matrices de Pauli. Ahora considere que el estado inicial $\rho(t = 0)$ del sistema representa la probabilidad p_{-1} de medir el spin en x con valor -1 (con autovector $|-1\rangle$) y la probabilidad de medir el spin en x con valor $+1$ (con autovector $|+1\rangle$). Este estado tiene la forma:

$$\rho(t = 0) = p_{-1} |-1\rangle \langle -1| + p_{+1} |+1\rangle \langle +1| \tag{3}$$

Luego de un tiempo $t = t_f$ el estado evoluciona. Sin realizar cálculos explique porque las probabilidades de medir el spin en x (ya sea -1 o $+1$) deben cambiar. Posteriormente demuestre que $\rho(t) = U(t)\rho(t = 0)U^\dagger(t)$, donde $U(t)$ es el operador de evolución temporal, a partir de $\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)]$, usando esto calcule las nuevas probabilidades.