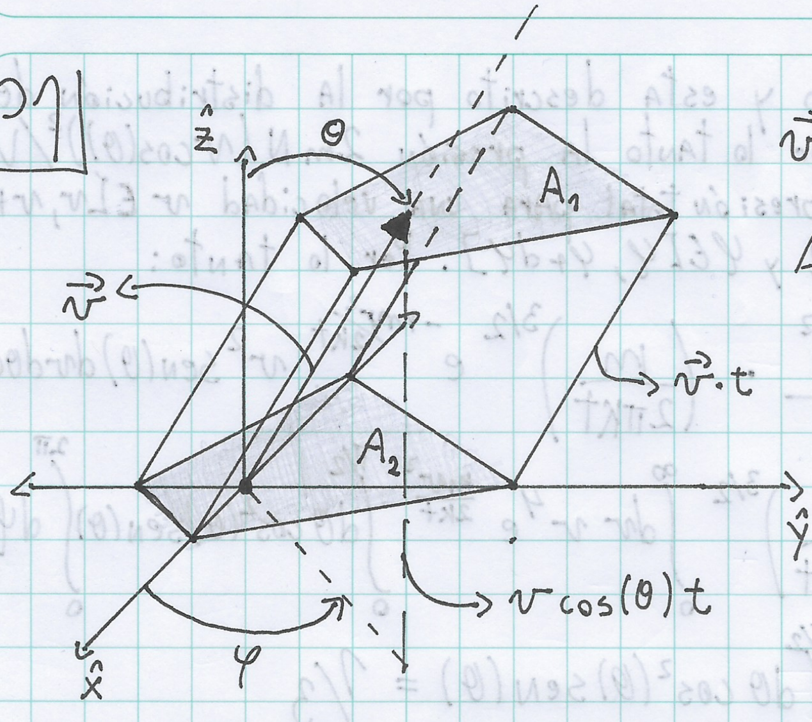
P1



$\vec{v} = (v, \theta, \varphi)$

$A_1 = A_2$

Empezamos considerando la colisión de 1 partícula contra un muro del contenedor de área A_1. Empezamos en $t_0 = 0$ y $t_c = t$ (tiempo de colisión).

La partícula empieza en $t_0 = 0$ en el origen, alineamos el plano x-y con el área A_1 tal que la componente perpendicular a A_1 es $v_z = v\cos(\theta)$. La partícula colisiona con la pared en $t_c = t$ elásticamente tal que v_z cambia a $v_z = -v\cos(\theta)$, la distancia perpendicular entre x-y y A_1 es $v\cos(\theta)t$.

Consideramos:

$$F_1(v) = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv\cos(\theta)}{t} \Rightarrow P_1(v) = \frac{2mv\cos(\theta)}{A_1 t}$$

Ahora consideramos todas las partículas en el volumen encerrado entre A_1 y A_2. La densidad de partículas es uniforme N/V, por lo tanto la cantidad de partículas en el volumen $V' = A_1 v\cos(\theta)t$ es $n' = NA_1 v\cos(\theta)t/V$. La presión generada por estas partículas es:

$$\left(\frac{2mv\cos(\theta)}{A_1 t}\right)\left(\frac{NA_1\cos(\theta)vt}{V}\right) = \frac{2mN(v\cos(\theta))^2}{V}$$

Pero v no es único y está descrito por la distribución de Maxwell-Boltzmann, por lo tanto la presión $2mN(v\cos(\theta))^2/V$ es una fracción de la presión total para una velocidad $v \in [v, v+dv]$, y ángulos $\theta \in [\theta, \theta+d\theta]$ y $\varphi \in [\varphi, \varphi+d\varphi]$. Por lo tanto:

$$dP = \frac{2mN(v\cos(\theta))^2}{V} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kt}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kt}} v^2 \operatorname{sen}(\theta)\, dv\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow P = \frac{2mN}{V} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kt}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} dv\, v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kt}} \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad ; \quad \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) = 1/3$$

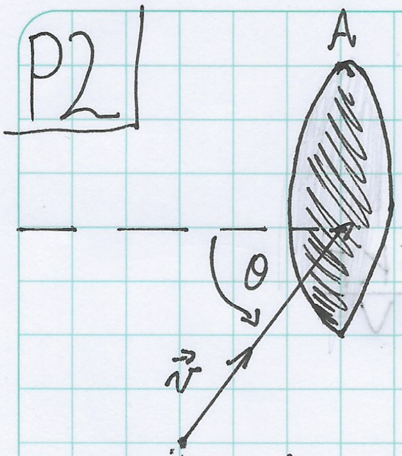
$$\int_0^{\infty} dv\, v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kt}} = 3\sqrt{\pi} \Big/ 8\left(\frac{m}{2kt}\right)^{5/2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{2mN}{V}\left(\frac{m}{2\cancel{\pi} kt}\right)^{3/2} \cdot \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}\sqrt{\pi}}{8\left(\frac{m}{2kt}\right)^{5/2}} = \frac{mN}{V} \cdot \frac{kt}{m} = \frac{Nkt}{V}$$

$$\Rightarrow P = \frac{Nkt}{V}$$

//

P2



Consideramos la cantidad de partículas dN que salen por el agujero A:

$$dN = -\frac{N}{V} \cdot dV$$; donde dV es el volumen infinitecimal de gas que escapa.

$$dV = A \cdot dx = A\,dt \int d\vec{v}\, v \cos(\theta)\, f_{MB}(\vec{v})$$

$$= A\,dt \int_0^{+\infty} dv\, v^3 \int_0^{\pi/2} d\theta \cos(\theta)\, \mathrm{sen}(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi\; e^{-\frac{mv^2}{2kt}} \left(\frac{m}{2\pi k t}\right)^{3/2}$$

$$\Longrightarrow \frac{dN}{dt} = -\frac{NA}{V} \cdot \cancel{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\frac{2kt}{m}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{m}{2\pi k t}\right)^{3/2}$$

$$= -\frac{NA}{2V}\left(\frac{2kt}{m\pi}\right)^{1/2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{dN}{N} = -\frac{A}{2V}\left(\frac{2kt}{m\pi}\right)^{1/2} dt \quad / \int$$

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\frac{A}{2V}\left(\frac{2kt}{m\pi}\right)^{1/2} t$$

$$\Longrightarrow N(t) = N_0\, e^{-\frac{A}{2V}\left(\frac{2kt}{m\pi}\right)^{1/2} t}$$

$$\Longrightarrow N(t) = N_0\, e^{-t/\tau} \quad ; \quad \tau = \left(\frac{A}{2V}\sqrt{\frac{2kt}{m\pi}}\right)^{-1}$$

Usando la ley de Boyle :

$$P(t)\,V = N(t)\,kT$$

$$\Longrightarrow P(t) = P_0\, e^{-t/\tau} \;;\; P_0 = \frac{N_0 kT}{V}$$