

Tarea 1

Fecha de entrega: 23 de Agosto

Profesor: Felipe Barra De La Guarda

Auxiliar: Matías Araya Satriani

Ayudantes: Astor Sandoval Parra

Borrachitx

Una persona, cuyo estado étlico es puesto en evidencia, además de su hálito alcohólico, por lo errático de su andar, se dirige a su hogar siguiendo un camino unidimensional. El camino es trazado a pasos de largo l , que ocurren cada τ segundos. La probabilidad de dar un paso a la derecha es p , mientras que un paso en el sentido contrario tiene probabilidad $1 - p$. Suponga que su hogar se encuentra en $x = ml$.

1. Determine la probabilidad $P(m, n)$ de que la persona llegue a su casa en un tiempo $t = n\tau$.
2. Encuentre el promedio y la desviación estándar de la persona en función del tiempo.
3. Para el caso $p = 1/2$, encuentre $P(x, t)$ cuando ha pasado un tiempo muy grande. Considere que $l, \tau \rightarrow 0$ pero $D = l^2/2\tau$ es constante. Comente.

Dado Cuántico

Te han otorgado varios "dados de 3 caras", que al ser lanzados, pueden mostrar 1, 2 o 3. Existen 3 juegos jugados con estos dados: *Distinguibles*, *Bosones* y *Fermiones*. En cada turno de estos juegos, el jugador lanza un dado por vez, empezando de nuevo si es requerido por las reglas, hasta que una combinación legal ocurra.

En *Distinguibles*, todos los lanzamientos son legales. En *Bosones*, un lanzamiento es legal sólo si el nuevo número es mayor o igual al anterior. En *Fermiones*, un lanzamiento es legal sólo si el nuevo número es estrictamente mayor al anterior. Estas reglas en los dados son las mismas que gobiernan la mecánica estadística cuántica de partículas idénticas.

1. Para un lanzamiento legal de dos dados jugando Bosones, ¿cuál es la probabilidad $P(4)$ de obtener un 4? ¿Cuál es la probabilidad $P(4)$ para un juego de Fermiones?
2. Para un lanzamiento legal de tres dados jugando Fermiones, ¿cuál es la probabilidad $P(6)$ de obtener un 6?
3. Investigue y comente respecto a cómo las reglas y resultados del juego de Fermiones se relacionan con el principio de exclusión de Pauli.

4. Para un lanzamiento legal de 2 dados, ¿cuánto mejora la probabilidad de obtener dobles al pasar de un juego de Distinguibles a Bosones?
5. Encuentre cuantos lanzamientos legales existen al lanzar M dados de N lados en Bosones.
6. ¿Cuánto mejora la probabilidad de obtener el mismo número en todos los dados al pasar de un juego de Distinguibles a Bosones en el caso general anterior?
7. Investigue y comente respecto a cómo el resultado anterior se relaciona con el Condensado de Bose-Einstein.

Aproximación de Stirling y Series Asintóticas

Una aproximación importante y útil en mecánica estadística es la aproximación de Stirling para $n!$, válida para n grande. No es una serie de Taylor tradicional, es una serie asintótica. La formula de Stirling es muy útil en este curso, además, las series asintóticas son útiles en múltiples ramas de la física y matemática.

Muestre, mediante el cálculo de la integral $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx$ (esta es la conocida función gamma $\Gamma(z)$), que $\log(n!) \sim (n + 1/2) \log(n + 1/2) - n - 1/2 \log(1/2)$.

Muestre que el resultado es compatible con la fórmula de Stirling más precisa y tradicional $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$; en particular, muestre que la diferencia de los logaritmos tiende a una constante a medida que $n \rightarrow \infty$.

Este fórmula es en realidad la primera aproximación de la fórmula de Stirling, que tiene la forma:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right). \quad (1)$$

La cual es una serie asintótica, para cualquier n particular, hay una cierta cantidad de términos en la expansión que mejoran la precisión de la aproximación, si se tomán más términos de la expansión la precisión será menor, ¡esto no converge!