Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI4104-1 – Mecáncia Estadística

Auxiliar 1

16 de Agosto 2022

Profesor: Felipe Barra De La Guarda
Auxiliar: Matías Araya Satriani
Ayudantes: Astor Sandoval Parra

Repaso de distribución de probabilidades

Las distribucion de probabilidad es un concepto fundamental en la mecánica estadística, aquí se presentan tres distribuciones comunes encontradas en la naturaleza y en la tecnología:

1. Uniforme (ejemplo: Random Number Generator):

$$\rho_{uniforme}(x) = 1 \ \text{Si } 0 \leq x < 1 \ ; \ \rho_{uniforme}(x) = 0 \text{ para los demás casos} \tag{1}$$

2. Exponencial (ejemplo: Decaimiento radioactivo, colisiones en gases):

$$\rho_{exp}(x) = \frac{e^{-x/\tau}}{\tau} \ , \ \text{Para } x \geq 0 \tag{2}$$

3. Gaussiana (ejemplo: Distribución de velocidades en un gas):

$$\rho_{Gauss}(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{3}$$

Probabilidades
Debe calcular las probabilidades para distintos eventos usando las tres distribuciones de probabilidad dadas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de un RNG uniforme (que entrega números entre 0 y 1) de entregar un número entre $x = 0.71$ y $x = 0.85$?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera del decaimiento radioactivo de un núcleo sea el doble del tiempo exponencial τ?

3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un puntaje mas alto que 2σ sobre la media μ si la distribución de notas del examen sigue una distribución Gaussiana? (**Hint:** $\int_2^{+\infty} dx(1/\sqrt{2\pi})\text{exp}(-x^2/2) = (1 - \text{erf}(\sqrt{2}))/2 \sim 0.023$).

Normalización, Media y Desviación Estándar
Muestre que las distribuciones de probabilidad presentes se encuentran en su forma normalizada.
¿Cuál es la media μ de cada distribución?
¿Cuál es la desviación estándar $\sigma = \sqrt{\int dx(x-\mu)^2\rho(x)}$ de cada distribución?
(**Hint:** $\int_{-\infty}^{\infty} dx(1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2) = 1$ y $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx(1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2) = 1$).

Distribuciones multidimensionales En mecánica estadística usualmente se discuten distribuciones de probabilidad para varias variables simultáneamente. Consideremos la distribución de probabilidad de las velocidades de una molécula. Si las velocidades v_x, v_y y v_z son independientes entre ellas y cada una esta descrita por una Gaussiana con $\sigma = \sqrt{kT/M}$ entonces describimos la distribución de probabilidad combinada como el producto de estas tres Gaussianas:

$$\rho\left(v_x, v_y, v_z\right) = \frac{1}{(2\pi(kT/M))^{3/2}} e^{-M\mathbf{v}^2/2kT)} = \left(\sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} e^{\frac{-Mv_x^2}{2kT}}\right)\left(\sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} e^{\frac{-Mv_y^2}{2kT}}\right)\left(\sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} e^{\frac{-Mv_z^2}{2kT}}\right) \tag{4}$$

Muestre, usando el resultado de la desviación estándar de una Gaussiana, que la energía cinética promedio por dimensión es $kT/2$. Muestre también que la distribución de probabilidad de que la velocidad de la molécula sea $v = |\mathbf{v}|$ esta dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$\rho_{\text{M-B}}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{v^2}{\sigma^3}\right) e^{-v^2/2\sigma^2} \tag{5}$$

(**Hint:** Considere la región en el espacio de velocidades 3D donde $|\mathbf{v}|$ cae entre v y δv).

Tiempos de espera

En una carretera, el número de autos y buses viajando hacia el este es el mismo: cada hora, en promedio, hay 12 buses y 12 autos pasando. Los buses estan programados: cada bus pasa exactamente cada 5 minutos después del bus anterior. Por otro lado, los autos pasan de manera aleatoria: en un corto intervalo dt la probabilidad de que un auto pase es de dt/τ, con $\tau = 5$ minutos. Un observador aburrido cuenta los buses y autos que pasan.

1. Verifique que en promedio, cada hora el número de autos pasando es 12.
2. ¿Cual es la probabilidad $P_{bus}(n)$ de que n buses pasen frente al observador en un rango de tiempo de 10 minutos elegido de manera aleatoria?, ¿Cuál es la probabilidad $P_{auto}(n)$ de que n autos pasen frente al observador en el mismo intervalo de tiempo?
3. ¿Cuál es la distribución de probabilidad ρ_{bus} y ρ_{auto} para el intervalo de tiempo Δ entre dos buses seguidos?, ¿Y para los autos?, ¿Cual es el promedio de estas distribuciones?
4. Si otro observador llega a la carretera en un tiempo aleatorio, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el tiempo Δ que tiene que esperar para que llegue el primer bus?, ¿Cuál es la distribución de probabilidad del tiempo que debe esperar para que pase el primer auto?