

Aux 2 P3

P3 Se puede demostrar de varias formas; aquí mostraremos 2:

Forma 1: Se define la red recíproca $\vec{G}$ a partir de la red real $\vec{R}$ usando la siguiente ecuación

$$1 = \exp(i \vec{G} \cdot \vec{R}) \quad (1)$$

entonces definamos como $\vec{X}$ a la recíproca de $\vec{G}$ y se define de la siguiente forma

$$1 = \exp(i \vec{X} \cdot \vec{G}) \quad (2)$$

veremos que (1) y (2) tienen la misma forma y como es un problema lineal de solución única entonces $\vec{R} = \vec{X}$. De esta forma, la recíproca de $\vec{G}$ es $\vec{R}$.

Forma 2: Usando los vectores recíprocos de los vectores reales. Sea $\vec{a}_i$ los vectores reales y $\vec{b}_i$ los vectores recíprocos y $\vec{c}_i$ los recíprocos de $\vec{b}_i$. Entonces

~~$$\vec{b}_i = \frac{2\pi}{V_b} \vec{a}_j \times \vec{a}_k$$~~

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{V_b} \vec{a}_2 \times \vec{a}_3; \quad \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{V_b} \vec{a}_3 \times \vec{a}_1$$

$$\vec{b}_3 = \frac{2\pi}{V_b} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

$$\vec{C}_1 = \frac{2\pi}{V_c} \vec{b}_2 \times \vec{b}_3 ; \quad C_2 = \frac{2\pi}{V_c} \vec{b}_3 \times \vec{b}_1 ;$$

$$\vec{C}_3 = \frac{2\pi}{V_c} \vec{b}_1 \times \vec{b}_2 ; \quad V_b = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$$

$$V_c = \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3)$$

queremos demostrar que $C_i = a_i$

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{V_b} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \quad \epsilon^{ijk} \hat{n}_i a_{2,j} a_{3,k}$$

$$\vec{C}_1 = \frac{2\pi}{V_c} (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) \quad \epsilon^{mnl} b_{2,n} b_{3,l} \hat{n}_m$$

entonces reemplazando

$$\epsilon^{mnl} b_{2,n} b_{3,l} \hat{n}_m = \epsilon^{mnl} \hat{n}_m \frac{2\pi}{V_b} a_{3,i} a_{1,j} \epsilon^{nij}$$

$$\vec{C}_1 = \frac{2\pi}{V_c} \dots = \left(\frac{2\pi}{V_b}\right)^2 \epsilon^{mnl} \epsilon^{nij} \epsilon^{lpq} a_{3,i} a_{1,j} a_{1,p} a_{2,q}$$

Hecho en Auxiliar $\wedge$

$$V_b = \epsilon^{ijk} a_{1,i} a_{2,j} a_{3,k} \quad \parallel \quad \epsilon^{mnl} \epsilon^{lpq} = \delta_{pm} \delta_{qn} - \delta_{pn} \delta_{qm}$$

$$\epsilon^{mnl} b_{2n} b_{3l} = \epsilon^{nij} (a_{1j} a_{1m} a_{2n} a_{3i} - a_{1j} a_{1n} a_{2m} a_{3i})$$

$$= \epsilon^{nij} a_{1j} a_{1m} a_{2n} a_{3i}$$

$\epsilon^{nij} a_{1j} a_{1n} = 0$
 Demostrado en aux.

$$= V_b a_{1m}$$

Así que

$$\vec{C}_1 = \frac{2\pi}{V_c} \left(\frac{2\pi}{V_b} \right)^2 V_b a_{1,m} \hat{n}_m$$

y además

$$V_c = \epsilon^{ijk} b_{1i} b_{2j} b_{3k} = \epsilon^{ijk} \left(\frac{2\pi}{V_b} \right)^3 \epsilon^{imn} a_{2n} a_{3l} \epsilon^{jkl} a_{3l} a_{1m} \epsilon^{k} a_{1l} a_{2m}$$

~~Para acabar de demostrar que $\vec{C}_1 = \vec{a}_1$~~

$$= \left(\frac{2\pi}{V_b} \right)^3 \underbrace{(\delta\delta - \delta\delta)}_{ijk \ i mn} a_{2n} a_{3l} \epsilon^{jkl} a_{3l} a_{1m} \epsilon^{k} a_{1l} a_{2m}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{V_b} \right)^3 \left(\epsilon^{jlp} a_{2n} a_{3l} a_{3p} a_{1m} - \epsilon^{jlp} a_{2n} a_{3l} a_{3p} a_{1m} \right) \epsilon^{k} a_{1l} a_{2m}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{V_b} \right)^3 (V_b a_{3k}) \epsilon^{kst} a_{1s} a_{2t}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{V_b} \right)^3 V_b^2 = \frac{(2\pi)^3}{V_b}$$

$$\text{Así que } \vec{C}_1 = \frac{2\pi}{V_c} \left(\frac{2\pi}{V_b} \right)^2 V_b \vec{a}_1 = 2\pi \frac{V_b}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^2}{V_b} \vec{a}_1 = \vec{a}_1$$