Aux 1, P2

P2] a.- La frecuencia de plasma del metal está dada por

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r(\omega) E = 0 , \qquad (1)$$

con $\epsilon_r(\omega)$ la constante dielectrica ($\in \mathbb{C}$) que depende de la frecuencia. En el límite de altos frecuencias, la cte. dieléctrica tiene la siguiente expresión:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} ,$$

con ω_p la frecuencia de plasma.

De la ecuación (1) vemos que si $\epsilon_r(\omega) \in \mathbb{R}$, entonces las soluciones son oscilatorios ó exponencialmente decayentes dependiendo del signo de "$\omega^2 \epsilon_r / c^2$". El enunciado sugiere que la radiación sólo penetra una pequeña distancia por lo que el comportamiento de la solución es exponencialmente decayente del tipo

$$E(x) = E(0)\, e^{-\sqrt{-\epsilon_r(\omega)}\,\omega x/c} ,$$

la solución exponencialmente creciente la descartamos pues tiende a infinito en el infinito.

El enunciado nos dice que la intensidad baja a $1/e$ en un $\lambda = \lambda_0$, esto quiere decir que

$$\frac{1}{e} = \frac{E(x=\lambda_0)}{E(0)} \Rightarrow \sqrt{-\epsilon_r(\omega_0)}\,\omega_0 \lambda_0 / c = 1 ,$$

ARTEL

de esta forma

$$\epsilon_r(\omega_0) = -\left(\frac{c}{\omega_0 \lambda_0}\right)^2 .$$

y esto lo igualamos con la exprsión de altas frecuencia $\epsilon_r(\omega) =$

$$\epsilon_r(\omega_0) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} ,$$

→ expresión de alta frecuencia

y obtenemos que

$$-\left(\frac{c}{\omega_0 \lambda_0}\right)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$$

y despejando

$$\omega_p = \omega_0 \left(1 + \left(\frac{c}{\omega_0 \lambda_0}\right)^2\right)^{1/2} \quad (*)$$

b) Podemos relacionar la frecuencia del plasma con la densidad de electrones usando la siguiente expresión

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} ,$$

igualamos con (*) y obtenemos que

$$\omega_0^2\left(1+\left(\frac{c}{\omega_0\lambda_0}\right)^2\right)=\frac{4\pi ne^2}{m} \quad ,$$

y al despejar

$$n=\frac{\omega_0^2\, m}{4\pi e^2}\left(1+\left(\frac{c}{\omega_0\lambda_0}\right)^2\right) \; .$$

c) Para esto vamos a utilizar la ecuación (*) pero en forma general

$$\omega_p=\omega\left(1+\left(\frac{c}{\omega\lambda}\right)^2\right)^{1/2} \quad ,$$

dado que ω_p es intrínseco al material, no depende de la frecuencia de plasma ω. De esta forma, al derivar debe ser cero

$$\frac{d\omega_p^2}{d\omega}=0$$

y resolvemos por regla de la cadena

$$\frac{d\omega_p^2}{d\omega}=2\omega\left(1+\left(\frac{c}{\omega\lambda}\right)^2\right)+\omega^2\left(-\frac{2c^2}{\omega^3\lambda^2}-\frac{2c^2}{\omega^2\lambda^3}\frac{d\lambda}{d\omega}\right)$$

$$=2\omega-\frac{2c^2}{\lambda^3}\frac{d\lambda}{d\omega} \quad ,$$

la expresión anterior se iguala a cero y obtenemos que

$$2\omega = \frac{2c^2}{\lambda^3}\frac{d\lambda}{d\omega} \Rightarrow \frac{1}{c^2}\,2\omega\,d\omega = \frac{2\,d\lambda}{\lambda^3}$$

que es re-acomodada usando

$$\cancel{\omega\,d\omega} \;\cancel{=2d(\omega^2)}$$

$$\cancel{\frac{d\lambda}{\lambda^3}} = \cancel{-2d\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}$$

$$2\omega\,d\omega = d(\omega^2)$$

$$-2\frac{d\lambda}{\lambda^3} = d\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

y obtenemos

$$d\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = -\frac{1}{c^2}\,d\omega^2 \quad ,$$

Integramos la expresión anterior en una ventana de frecuencias debajo de ω_0

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = -\frac{1}{c^2}\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega^2 \quad ,$$

con $\omega = \omega_0$ cuando $\lambda = \lambda_0$, luego obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} = -\frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \quad ,$$

y ahora despejamos λ

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{c^2}\left(\omega_0^2-\omega^2\right) + \frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{c^2\lambda_0^2}\left(\lambda_0^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+c^2\right)$$

y obtenemos

$$\lambda^2 = \frac{c^2\lambda_0^2}{\lambda_0^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+c^2},$$

que es

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\frac{\lambda_0^2}{c^2}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}}.$$