P1

En el modelo de Drude se asume que la distribución de probabilidad de la velocidad de e^- es la distribución de Maxwell-Boltzmann, que es:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2K_BT}} ,$$

donde m es la masa de la partícula, en este caso el e^-, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura.

De esta forma, la probabilidad de que un e^- emerja con una velocidad entre v y $v+dv$ está dada por

$$dP = f(v)\,dv .$$

Así que para encontrar la probabilidad de que el e^- emerja a una velocidad mayor a v_m, se debe integrar la expresión anterior desde v_m hasta el infinito

$$P_{v>v_m} = \int_{v_m}^{\infty} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2K_BT}} dv$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{3/2} \int_{v_m}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2K_BT}} dv .$$

Para continuar vamos a hacer el siguiente cambio de variable:

$$x^2 = v^2 \frac{m}{2k_BT} , \quad \text{que es} \quad v^2 = x^2 \frac{2k_BT}{m}$$

y el diferencial es $dv = \frac{2k_BT}{m} dx$.

De esta forma, la integral anterior queda de la siguiente manera

$$P_{v>v_m} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_1^\infty \left(\frac{2k_BT}{m}\right) x^2 e^{-x^2} \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}\, dx$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{3/2} \int_1^\infty x^2 e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty x^2 e^{-x^2} dx ,$$

Luego es necesario integrar por partes, donde se utilizará $u = x$ y $dv = xe^{-x^2}$ por lo que $du = 1$ y $v = -e^{-x^2}/2$.

$$\int_1^\infty x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x e^{-x^2} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{2} dx = +\frac{1}{2e} + \int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{2} dx$$

Así que

$$P_{v>v_m} = \frac{2}{e\sqrt{\pi}} + \int_1^\infty \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx \quad ,$$

reconocemos la función error

$$\underbrace{\mathrm{erfc}}_{\text{error function}}(\rho) = \int_\rho^\infty \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx \quad ,$$

y de esta forma

$$P_{v>v_m} = \frac{2}{e\sqrt{\pi}} + \mathrm{erfc}(1) \approx 0{,}572 .$$