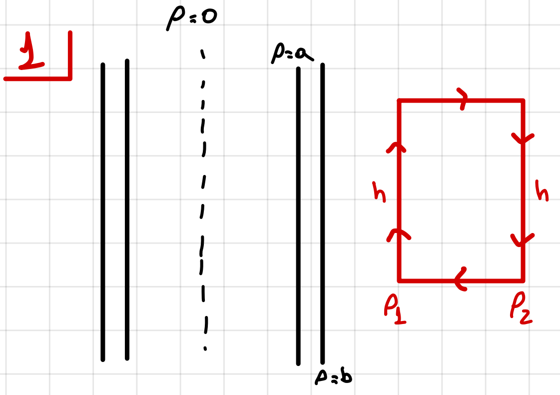
Pauta P1 C3

a) Argumentar por simetría que el campo es de la forma:

$$\vec{B} = B(\rho)\,\hat{n} \qquad +0{,}5$$

Usando Ampère sobre un camino rectangular en el plano (ρ, z): $+0{,}5$

1



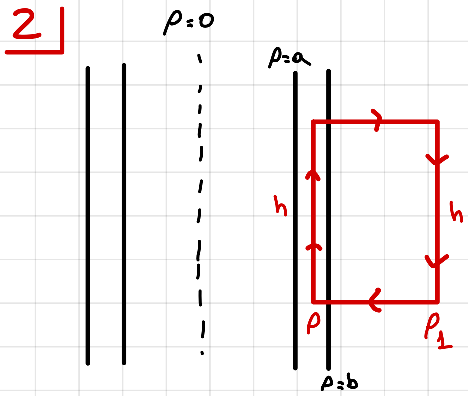
Por ley de Ampère,

$$B(\rho_1) = B(\rho_2)$$

y $B(\rho \to \infty) = 0$

$\Rightarrow B(\rho > b) = 0 \qquad + 1{,}0$

2

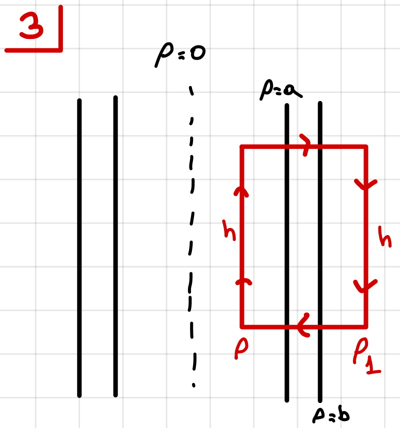


Por Ampère:

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_0^h \int_\rho^b \frac{a}{\rho'} J_0 \,\hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \, d\rho' \, dz$$

$\Rightarrow B(a < \rho < b) = \mu_0 J_0 \, a \ln(b/\rho) \qquad +0{,}5$

3



Por Ampère:

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_0^h \int_\rho^b \frac{a}{\rho'} J_0 \,\hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \, d\rho' \, dz$$

$\Rightarrow B(\rho < a) = \mu_0 J_0 \, a \ln(b/a) \qquad +0{,}5$

* Alternativamente, se puede hacer desde dentro hacia afuera en función de B(0). En ese caso el puntaje es:

$+0{,}5$ x tramo $= +1{,}5$ $+0{,}5$ Jusficiación simetría $+1{,}0$ Calcular $B(0)$ con BS y concluir $B(\rho > b) = 0$

b) Justificar por simetría que $\vec{A} = A(\rho)\hat{\phi}$ +0,5

Considerar caminos cerrados circunferenciales según $\hat{\phi}$ +0,5

1| $\rho < a$

$$\int_0^{2\pi} A(\rho)\rho d\phi = 2\pi\rho A(\rho) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} \mu_0 J_0 a \ln(b/a)\,\hat{\kappa}\cdot\hat{\kappa}\,\rho' d\rho' d\phi$$

$$\Rightarrow A(\rho<a) = \frac{\rho \mu_0 J_0 a \ln(b/a)}{2}$$ +0,5

2|

$$\int_0^{2\pi} A(\rho)\rho d\phi = 2\pi\rho A(\rho) = \pi\mu_0 J_0 a^3 \ln(b/a) + 2\pi\mu_0 J_0 a \int_a^{\rho'} \rho' \ln(b/\rho')\,d\rho'$$

IPP

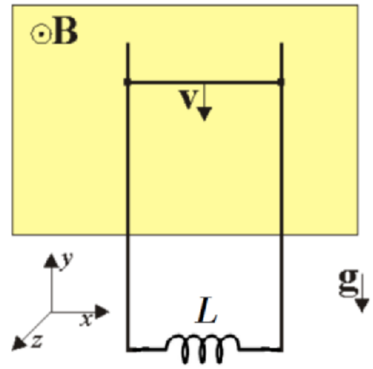
$$\Rightarrow A(a<\rho<b) = \frac{\mu_0 a J_0}{\rho}\left[\frac{\rho^2}{2}\ln(b/\rho) + \frac{\rho^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right]$$ +1,0

3| Evaluando la integral anterior en $\rho = b$, ya que no hay flujo para $\rho > b$:

$$A(\rho>b) = \frac{\mu_0 a J_0 (b^2 - a^2)}{4\rho}$$ +0,5

P2. Considere un carril metálico conductor ideal (ie, de resistencia despreciable), por el cual puede deslizarse una varilla horizontal de masa m y largo b, también metálica (e igualmente conductora ideal). A la parte inferior del carril se conecta una autoinductancia L.

La varilla está inmersa en un campo uniforme $\vec{B} = B_0\hat{k}$ y cae por la acción de la gravedad. Inicialmente, la varilla se encuentra en reposo y no circula corriente por el circuito. En ese momento (t=0), la varilla se suelta.



a) Explique brevemente qué fuerzas siente la varilla (indique dirección y sentido), por qué se induce corriente en ella y justifique en qué sentido circulará. [2 ptos.]

La varilla siente:

1) Peso: pues está en presencia de gravedad. Apunta en $-\hat{y}$. (+0,5)

2) Fuerza magnética: $\vec{F}_m = \int (I d\vec{\ell}) \times (\vec{B})$
Como la varilla está en presencia de un campo magnético externo, hay un flujo de $\vec{B}$ a través del circuito que la varilla forma con el carril metálico. Luego, como la vara inicialmente va cayendo, el área de ese circuito va disminuyendo $\Rightarrow$ el flujo Φ también disminuye!

• Por ende, por la ley de Faraday-Lenz se inducirá una corriente I por el circuito tal que la fuerza asociada se oponga a la variación de flujo!

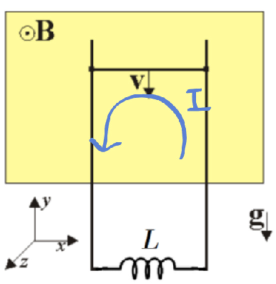
Φ disminuye $\Rightarrow$ $\vec{F}_m$ es tal que Φ deje de disminuir! (+0,5)

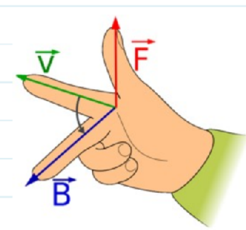
∴ Como Φ disminuye pq. la varilla cae $\Rightarrow$ $\vec{F}_m$ es tq. la varilla deje de caer

$\Rightarrow$ $\vec{F}_m$ apunta en $+\hat{y}$. (+0,5)

* En base a lo anterior, si $\vec{F}_m$ apunta en $+\hat{y}$ y $\vec{B} = B_0\hat{k}$, por la regla de la mano derecha, I debe circular en sentido antihorario.

(+0,5)





b) Determine la ecuación de movimiento para la varilla. [3 ptos.] → 1. 1ª ley de Kirchhoff:

i) Ley Faraday-Lenz: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ y $\Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_0^b\int_0^y (B_0\hat{k})\cdot(dxdy\hat{k}) = B_0 b\cdot y$

$\Rightarrow \quad \varepsilon_F = -B_0\cdot b\cdot\dfrac{dy}{dt} = -B_0 b\cdot v(t)$ (+0,5)

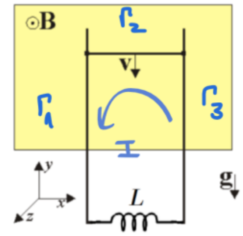
ii) Autoinductancia: $\varepsilon_L = -L\dfrac{dI}{dt}$

(+0,5)

II° Kirchhoff: $\Sigma\varepsilon_i = 0 \Rightarrow \varepsilon_F + \varepsilon_L = 0 \Rightarrow$ $\boxed{-B_0 b v(t) = L\dfrac{dI}{dt}}$ ... (1)

→ 2°: Fuerzas y II° Newton:

$$\vec{F}_m = \int (I\,d\vec{l})\times(\vec{B}) = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3}$$



se anulan entre sí

$$= \int_{\Gamma_2} (I\,d\vec{l})\times(\vec{B}) = \int_0^b I\cdot(-dx\hat{x})\times(B_0\hat{k}) = -IbB_0(-\hat{y}) = \underline{IbB_0\hat{y}} \quad (+0{,}5)$$

luego, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow IbB_0\hat{y} - mg\hat{y} = ma\hat{y} \Rightarrow \boxed{IbB_0 - mg = m\cdot\ddot{y}}$ ... (2) (+0,5)

Juntando (1) y (2) para obtener la ec. de movimiento:
Integramos (1):

$$-B_0 b v(t) = L\frac{dI}{dt} \quad \Big/ \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{B_0 b}{L}\big(y(t) - \underbrace{y(0)}_{y_0}\big) = I(t) - \cancel{I(0)}^{0}$$

inicialm. no hay corriente

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = -\frac{B_0 b}{L}\big(y(t) - y_0\big)} \quad \ldots (3) \quad (+0{,}5)$$

Reemplazando (3) en (2) obtenemos la ec. de movimiento:

$$\ddot{y} = \frac{B_0 b}{m}\left[-\frac{B_0 b}{L}\big(y(t) - y_0\big)\right] - g \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = -\frac{(B_0 b)^2}{mL}(y - y_0) - g} \quad (+0{,}5)$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.

c) Determine la posición de la varilla en función del tiempo. [1 pto.]

Reescribamos la ec. de movimiento: $\ddot{y} = -\underbrace{\left(\frac{B_0^2 b^2}{mL}\right)}_{\equiv \omega^2}\underbrace{\left(y - y_0 + \frac{gmL}{(B_0 b)^2}\right)}_{\text{ou: } h(t)}$ $\Rightarrow \ddot{y} = \ddot{h}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{h} = -\omega^2 h} \to \text{MAS!} \quad (+0{,}3)$$

$\Rightarrow h(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ y entonces: $y(t) = h(t) + y_0 - \frac{gmL}{(B_0 b)^2}$

$\Rightarrow y(t) = A\cos(\omega t + \phi) + y_0 - \frac{gmL}{(B_0 b)^2}$ → Falta aplicar C.I.:

1) $y(0) = y_0 \Rightarrow A\cos\phi + \cancel{y_0} - \frac{gmL}{(B_0 b)^2} \overset{!}{=} \cancel{y_0}$ ... (1) (+0,2)

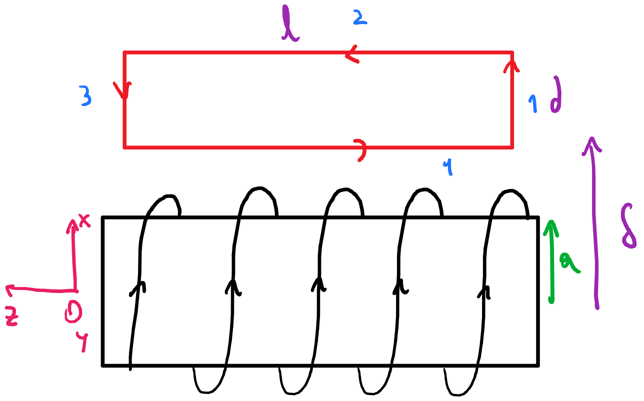
2) $\dot{y}(0) = 0$ (parte del reposo) $\Rightarrow -A\omega\,\text{sen}(\phi) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \text{sen}\,\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$ (+0,1)

En (1) $\Rightarrow A = \frac{gmL}{(B_0 b)^2}$ (+0,1) y entonces:

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{gmL}{B_0^2 b^2}\right)\left[\cos(\omega t) - 1\right] + y_0} \quad (+0{,}3)$$

Pauta P3 C3

a) Dado que la bobina es de largo L, y tiene N vueltas, las vueltas por unidades de largo son N/L. Luego, para determinar la inductancia mutua M, debemos darnos una corriente I arbitraria en uno de los circuitos, y ver el flujo magnético Φ que esta corriente induce en el otro circuito. Lo más fácil, en este caso, es calcular el flujo en la espira, a partir de una corriente que circula por la bobina. Sea esta corriente I_1, la cual genera un campo $\vec{B}$ al interior de la bobina, por simetría y RMD $\vec{B} = B\hat{k}$. De esta manera, considerando un loop de Ampère de lados l y d (arbitrarios), ubicado a una distancia δ cualquiera, por ley de Ampère se obtiene que



$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad / I_{enc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

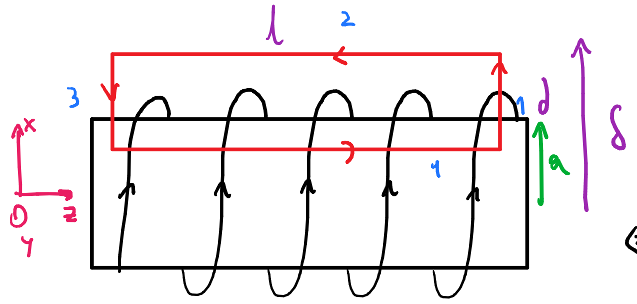
$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_{\delta}^{\delta+d} B(x)\hat{k}\cdot dx\hat{x}}_{0} + \int_{l}^{0} B(\delta+d)\hat{k}\cdot dz\hat{k} + \underbrace{\int_{\delta+d}^{\delta} B(x)\hat{k}\cdot dx\hat{x}}_{0} + \int_{0}^{l} B(\delta)\hat{k}\cdot dz\hat{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow B(\delta+d)\int_{l}^{0} dz + B(\delta)\int_{0}^{l} dz = 0 \Leftrightarrow -B(\delta+d)\cancel{l} + B(\delta)\cancel{l} = 0 \Leftrightarrow \boxed{B(d+\delta) = B(\delta)}$$

Como d y δ son arbitrarios, podemos escoger un $\delta \approx a$ (loop cercano a la bobina) y $d \to \infty$ (loop infinitamente ancho). Dado que la igualdad se mantiene, implica que el campo muy cerca de la bobina es igual al campo infinitamente lejos de esta. Como el campo infinitamente lejos de la bobina debe ser nulo, se concluye que muy cerca de esta también. Luego, el campo es nulo en todo punto fuera de la bobina.

$$\Rightarrow \vec{B}(\rho > a) = 0 \quad +1{,}0$$

Por otro lado, el campo dentro de la bobina se obtiene considerando el loop de la figura



Vueltas por unidad de largo

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad / \; I_{enc} = \frac{N}{L}\, l\, I_1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\int_1 \vec{B}\cdot d\vec{l}} + \cancel{\int_2 \vec{B}\cdot d\vec{l}} + \cancel{\int_3 \vec{B}\cdot d\vec{l}} + \int_4 \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{N}{L} I_1$$

$B\hat{k}\cdot dx\hat{i} = 0$ $\qquad$ $\vec{B} = 0$ $\qquad$ $B\hat{k}\cdot dx\hat{i} = 0$

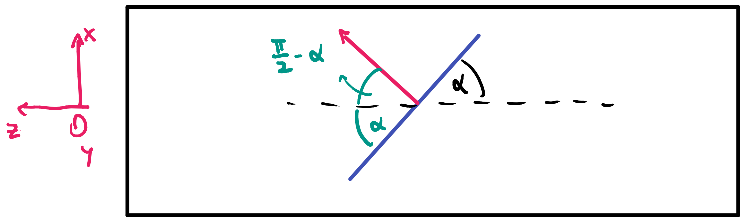
$$\Leftrightarrow \int_0^l B\hat{k}\cdot dz\hat{k} = \mu_0 \frac{N}{L} l I \Leftrightarrow B\cancel{\int_0^l dz} = \mu_0 \frac{N}{L} l I \Leftrightarrow B\cancel{l} = \mu_0 \frac{N}{L} \cancel{l} I_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\rho<a) = \mu_0 \frac{N}{L} I_1 \hat{k}} \qquad +1{,}0$$

Luego, se debe evaluar el flujo (Φ) en la espira. Para ello, usamos que

$$\Phi = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint \vec{B}\cdot dS\hat{n}$$

donde $\hat{n}$ (la orientación de la espira se deduce como sigue)



$$\Rightarrow \hat{n} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\hat{k} + \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\hat{i}$$

$$\Leftrightarrow \hat{n} = \cos\alpha\, \hat{i} + \operatorname{sen}\alpha\, \hat{k} \qquad +0{,}5$$

tal que, finalmente, el flujo se obtiene como sigue

$$\Phi_{1\to 2} = \iint \vec{B}\cdot dS\hat{n} = \int_0^{2\pi}\int_0^{b} \mu_0 \frac{N}{L} I_1 \hat{k} \cdot \rho\, d\rho\, d\phi \left(\cancel{\cos\alpha\, \hat{i}} + \operatorname{sen}\alpha\, \hat{k}\right)$$

$$= \mu_0 \frac{N}{L} I_1 \operatorname{sen}\alpha \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{b} \rho\, d\rho\, d\phi}_{\pi b^2} = \mu_0 \frac{N}{L} I_1 \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 \qquad +0{,}5$$

Notamos el subíndice $1\to 2$ pues corresponde al flujo enlazado en la espira (circuito 2) por la corriente que circula en la bobina (circuito 1)

Así, el coeficiente de inductancia mutua se obtiene mediante

$$M = \frac{\Phi_{1\to 2}}{I_1} = \frac{\mu_0 \frac{N}{L} \cancel{I_1} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2}{\cancel{I_1}} \Leftrightarrow \boxed{M = \mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2} \qquad +1{,}0$$

b) Si en la espira circula corriente I_2, esto induce un campo magnético que es enlazado por la bobina. Calcularlo es sumamente difícil, pero a partir del coeficiente de inductancia mútua, obtener ese flujo ($\Phi_{2\to1}$) es directo, de manera que

$$M = \frac{\Phi_{1\to2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2\to1}}{I_2} \Leftrightarrow \Phi_{2\to1} = M I_2 = \mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_2$$

Luego, si la corriente es de la forma $I_2 = I_0 \operatorname{sen}(wt)$,

$$\Rightarrow \Phi_{2\to1} = \mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_0 \operatorname{sen}(wt) \quad +1{,}0$$

Así, este flujo variable en la bobina induce una fem, i.e. una diferencia de potencial en ella, que se calcula como

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_0 \operatorname{sen}(wt)\right] = -\mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_0 w \cos(wt) \quad +0{,}5$$

Finalmente, dado que $-1 \leq \cos(wt) \leq 1$, la máxima diferencia de potencial se obtiene acotando ε, de manera que

$$\boxed{|\varepsilon_{máx}| = \mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_0 w} \quad +0{,}5$$