Pauta Aux. 13

P1) a) Sabemos que una onda se escribe mediante $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx \pm wt)$ (también puede ser sen (·)). Luego, haciendo la correspondencia con $\vec{E} = E_0 \cos(10x - 3\cdot 10^9 t)\,\hat{z}$, se tiene que

$$K = 10 \iff \frac{2\pi}{\lambda} = 10 \iff \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{10} \approx 0{,}6\ [m]}$$

$$w = 3\cdot 10^9 \iff \frac{2\pi}{T} = 3\cdot 10^9 \iff \boxed{T = \frac{2\pi}{3\cdot 10^9} \approx 2\cdot 10^{-9}\ [s]}$$

Finalmente, la velocidad se puede obtener de 2 formas:

$$v = \frac{w}{k} = \frac{3\cdot 10^{\cancel{9}}}{\cancel{1}0} \iff \boxed{v = 3\cdot 10^8\ [m/s]} \quad \Big| \quad v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}6}{2\cdot 10^{-9}} \iff \boxed{v = 3\cdot 10^8\ [m/s]}$$

b) La dirección de propagación de la onda es distinta al sentido de $\vec{E}$ y de $\vec{B}$. Luego, no es correcto decir que la onda se propaga en la dirección de $\hat{z}$! La propagación se ve por el vector de onda $\vec{k}$. Luego, el caso gral. es que

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm wt) \stackrel{!}{=} E_0 \cos(kx \pm wt)\,\hat{z}$$

↳ La onda en estudio tiene esta forma

Haciendo la correspondencia, se ve que

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \stackrel{!}{=} kx \Rightarrow k_y = k_z = 0$$

Luego, $\vec{k} = \pm k\hat{x}$, lo que significa que la onda se propaga en la dirección de $\hat{x}$. Para ver el sentido, debemos ver el término asociado al tiempo. Recordando que existen 2 casos

i) $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} + wt)$ → se propaga hacia $-\hat{k}$

ii) $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)$ → se propaga hacia $+\hat{k}$

Como la onda en estudio corresponde al segundo caso, la onda se propaga en la dirección de $-\hat{x}$, tal que

$$\boxed{\vec{k} = -k\hat{x}}$$

c) Obtener $\vec{B}$ es directo gracias a

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega} = \frac{-k\hat{x} \times E_0\cos(kx+\omega t)\hat{z}}{\omega} = -\cancelto{\frac{1}{V}}{\frac{k}{\omega}}\, E_0\cos(kx+\omega t)\,\cancelto{-\hat{y}}{(\hat{x}\times\hat{z})} = \frac{E_0}{V}\cos(kx+\omega t)\hat{y}$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{3\cdot 10^8}\cos(10x + 3\cdot 10^9 t)\hat{y}}$$

d) El vector de Poyn se obtiene directo mediante

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \underset{\vec{H} = \vec{B}/\mu_0}{=} \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[E_0\cos(kx+\omega t)\,\hat{z} \times \frac{E_0}{V}\cos(kx+\omega t)\hat{y}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0}E_0^2\cos^2(kx+\omega t)\,(\hat{z}\times\hat{y})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0}\cos^2(10x + 3\cdot 10^9 t)\hat{x}}$$

Notar que $\vec{S} = S\hat{x}$, la dirección de propagación antes encontrada.

P2) Obtener $\vec{E}$ a partir de $\vec{B}$ no es directo, como en el caso de la P1. Luego, debemos usar las ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

- $\rho = 0$ pues el promedio de $\vec{E} = 0$
- $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
- $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$
- $\vec{J} = 0$ dado que no hay corriente

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

De (1) y (3), se obtiene que

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Luego, para usar (2) y (4), debemos obtener los rotores de los campos y la derivada temporal de estos

$$\vec{B} = B_0 \sin(k_x x + k_z z - \omega t)\hat{y} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -B_0 \omega \cos(k_x x + k_z z - \omega t)\hat{y}$$

$$\to \nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial B_y}{\partial x}\hat{z} = -B_0 k_z \cos(k_x x + k_z z - \omega t)\hat{x} + B_0 k_x \cos(k_x x + k_z z - \omega t)\hat{z}$$

$$\to \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{y} + \frac{\partial E_z}{\partial t}\hat{z}$$

$$\to \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

Así, (2) y (4) se reescriben como

$$(2) \to \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z} = -B_0 \omega \cos(k_x x + k_z z - \omega t)\hat{y}$$

$$(4) \to -B_0 k_z \cos(k_x x + k_z z - \omega t)\hat{x} + B_0 k_z \cos(k_x x + k_z z - \omega t)\hat{z} = \mu\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x} + \mu\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{y} + \mu\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}\hat{z}$$

Igualando componente a componente en (2)

$$\hat{x}) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \iff \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (5)$$

$$\hat{y}) \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = -B_0 \omega \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \quad (6)$$

$$\hat{z}) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (7)$$

Y en (4)

$$\hat{x}) \quad -B_0 k_z \cos(k_x x + k_z z - \omega t) = \mu\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (8)$$

$$\hat{y}) \quad 0 = \mu\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (9)$$

$$\hat{z}) \quad B_0 k_x \cos(k_x x + k_z z - \omega t) = \mu\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (10)$$

De (9), se obtiene que

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow$$

i.e. E_y no depende del tiempo! dada la naturaleza de la onda (sinusoidal), esto quiere decir que la única opción es que $E_y = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_y = 0}$$

Por otra parte, reescribiendo la ecuación (8), se obtiene que

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{B_0 k_z}{\mu \varepsilon} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \Rightarrow E_x = \int -\frac{B_0 k_z}{\mu \varepsilon} \cos(k_x x + k_z z - \omega t)\, dt + C_1(x,y,z)$$

$$= \cancel{-} \frac{B_0 k_z}{\mu \varepsilon} \cdot \cancel{-}\frac{1}{\omega} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) + C_1(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_x = \frac{B_0 k_z}{\mu \varepsilon \omega} \sin(k_x x + k_z z - \omega t) + C_1(x,y,z)}$$

De manera análoga, para (10), se sigue como

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{B_0 k_x}{\mu \varepsilon} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \Rightarrow E_z = \int -\frac{B_0 k_x}{\mu \varepsilon} \cos(k_x x + k_z z - \omega t)\, dt + C_2(x,y,z)$$

$$= \frac{B_0 k_x}{\mu \varepsilon} \cdot -\frac{1}{\omega} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) + C_2(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_z = -\frac{B_0 k_x}{\mu \varepsilon \omega} \sin(k_x x + k_z z - \omega t) + C_2(x,y,z)}$$

Sin embargo, C_1 y C_2 se anulan por el hecho de que se trata e $\vec{E}$ debe ser una onda sinusoidal, ya que $\vec{B}$ lo es. Así, $C_1 = C_2 = 0$, de manera que el resultado es

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_z \hat{z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{B_0 k_z}{\mu \varepsilon \omega} \sin(k_x x + k_z z - \omega t)\, \hat{x} - \frac{B_0 k_x}{\mu \varepsilon \omega} \sin(k_x x + k_z z - \omega t)\, \hat{z}}$$

b) Dado que

$$\vec{B} = B_0 \sin(\underbrace{k_x x + k_z z}_{\vec{k}\cdot\vec{r}} - \omega t)\,\hat{y} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$$

Luego, $\vec{B} \times \vec{k}$ se calcula como sigue

$$\vec{B} \times \vec{k} = B\hat{y} \times (k_x \hat{x} + k_z \hat{z}) = Bk_x \underbrace{(\hat{y} \times \hat{x})}_{-\hat{z}} + Bk_z \underbrace{(\hat{y} \times \hat{z})}_{\hat{x}} = Bk_z \hat{x} - Bk_x \hat{z}$$

Se observa que el vector tiene las mismas componentes y direcciones que $\vec{E}$ encontrado anteriormente. Luego, queda claro que $\vec{E} \parallel \vec{B} \times \vec{k}$.

∎