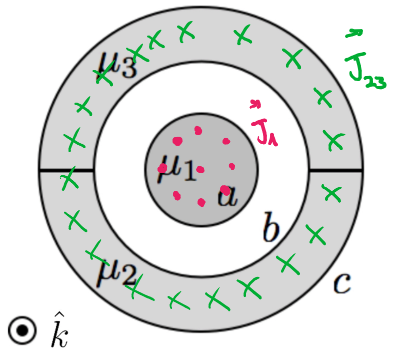
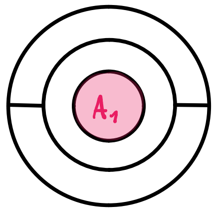
Auxiliar 10

P1) a) Para encontrar la corriente $I(\rho)$ solicitada, antes debemos conocer la densidad de corriente $\vec{J}$ que circula por cada zona del espacio, delimitada por los medios 1, 2 y 3.



$\vec{J}_1$) De partida, $\vec{J}_1 = J_1 \hat{k}$ por el sentido en el cual circula la corriente. Luego, considerando la sección transversal del cilindro

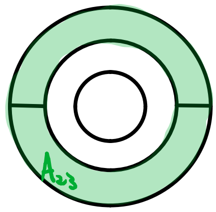
$$\Rightarrow I_0 \overset{!}{=} \iint \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} = J_1 A_1 \quad / \ A_1 = \pi a^2$$



$$\Leftrightarrow J_1 = \frac{I_0}{\pi a^2} \Rightarrow \boxed{\vec{J}_1 = \frac{I_0}{\pi a^2}\hat{k}}$$

$\vec{J}_{23}$) Análogamente, $\vec{J}_{23} = -J_{23}\hat{k}$, ya que la corriente circula en el sentido opuesto a $\vec{J}_1$. Así

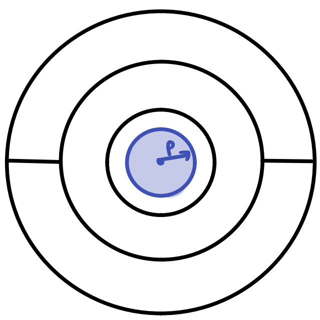
$$I_0 \overset{!}{=} \iint \vec{J}_{23} \cdot d\vec{S} = -J_{23} A_{23} \quad / \ A_{23} = \pi(c^2 - b^2)$$



$$\Leftrightarrow J_{23} = -\frac{I_0}{\pi(c^2-b^2)} \Rightarrow \boxed{\vec{J}_{23} = -\frac{I_0}{\pi(c^2-b^2)}\hat{k}}$$

Una vez conocidas las densidades de corriente, es posible calcular $I(\rho)$, para lo cual analizaremos las 4 zonas del espacio delimitadas por donde circula corriente.

$\rho < a$)



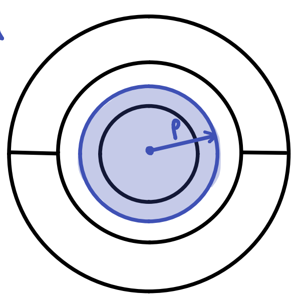
Se tiene en este caso que

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad / \ \vec{J} = \vec{J}_1$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} J_1 \hat{k} \cdot \rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{k} = J_1 \cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} \rho\, d\rho\, d\phi}^{\ \pi\rho^2} = \frac{I_0}{\cancel{\pi} a^2}\cancel{\pi}\rho^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I(\rho < a) = I_0 \frac{\rho^2}{a^2}}$$

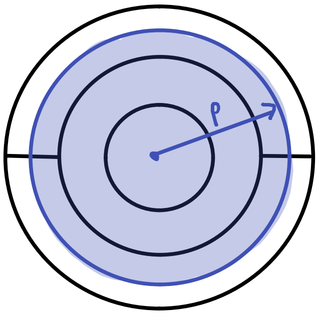
$a < \rho < b$)



Es directo que la sección circular encierra toda la corriente I_0 que circula por el cilindro, luego

$$\boxed{I(a < \rho < b) = I_0}$$

$b<\rho<c$ En este caso, la corriente encerrada es



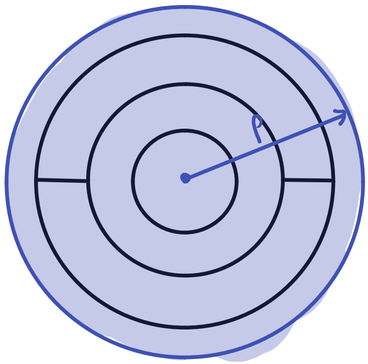
$$I(\rho) = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_1 \hat{k}\cdot \rho d\rho d\phi \hat{k}}_{=I_0} + \int_0^{2\pi}\int_b^{\rho} J_{23} \hat{k}\cdot \rho d\rho d\phi \hat{k}$$

$$= I_0 + J_{23} \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_b^{\rho} \rho d\rho d\phi}_{\pi(\rho^2-b^2)}$$

$$= I_0 - \frac{I_0}{\cancel{\pi}(c^2-b^2)} \cancel{\pi}(\rho^2-b^2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I(b<\rho<c) = I_0\left(1 - \frac{\rho^2-b^2}{c^2-b^2}\right)}$$

$\rho>c$ Tal como para el caso $a<\rho<b$, podemos ver directamente $I(\rho)$ según la corriente encerrada en la sección circular

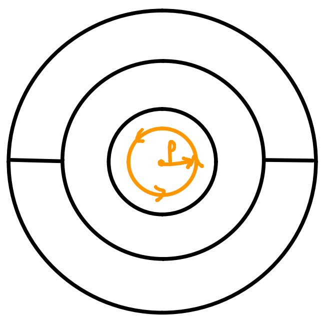


$$I(\rho) = I_0 - I_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{I(\rho>c) = 0}$$

b) Para obtener $\vec{H}$ y $\vec{B}$, podemos aprovechar la simetría (ya que se trata de un cilindro infinito), y usar ley de Ampère. Por RMD, como $\vec{J} = J\hat{k}$, se tiene que $\vec{B} = B(\rho)\hat{\phi}$, y luego, $\vec{H} = H(\rho)\hat{\phi}$. Así, consideramos un loop de Ampère circular, de radio ρ arbitrario, para así ir recorriendo las distintas zonas del espacio.

$\rho<a$ $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{libre}$ → En la parte a), I_{libre} ya fue calculado para todas las zonas de interés, por lo que usaremos los resultados.

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} H(\rho)\hat{\phi}\cdot \rho d\phi \hat{\phi} = I_0 \frac{\rho^2}{a^2}$$



$$\Leftrightarrow H(\rho)\cancel{\rho} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \frac{I_0 \rho^{\cancel{2}}}{a^2}$$

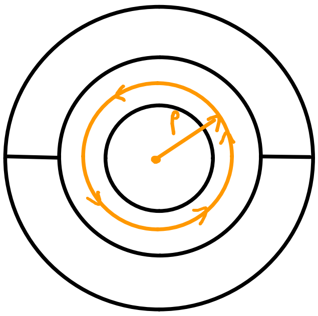
$$\Leftrightarrow H(\rho) = \frac{I_0 \rho}{2\pi a^2} \Rightarrow \boxed{\vec{H}(\rho<a) = \frac{I_0\rho}{2\pi a^2}\hat{\phi}}$$

Luego, como $\vec{B} = \mu\vec{H}$, se tiene que

$$\boxed{\vec{B}(\rho<a) = \mu_1 \frac{I_0 \rho}{2\pi a^2}\hat{\phi}}$$

$a<\rho<b$ Nuevamente

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{libre} \qquad / \; I_{libre} = I(a<\rho<b) = I_0$$



$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} H(\rho)\,\hat{\phi}\cdot\rho\, d\phi\,\hat{\phi} = I_0$$

Calculado antes

$$2\pi\rho H(\rho) = I_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{H}\left(a<\rho<b\right) = \frac{I_0}{2\pi\rho}\hat{\phi}}$$

Como en esta zona nos encontramos en el vacío, $\mu = \mu_0$, y por $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}\left(a<\rho<b\right) = \mu_0\frac{I_0}{2\pi\rho}\hat{\phi}}$$

$b<\rho<c$

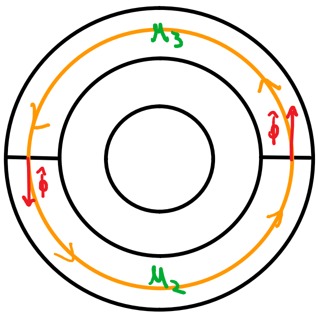
$$\Rightarrow \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{libre} \qquad / \; I_{libre} = I(b<\rho<c) = I_0\left(1 - \frac{\rho^2-b^2}{c^2-b^2}\right)$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0\left(1 - \frac{\rho^2-b^2}{c^2-b^2}\right) = I_0\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)$$

Acá debemos tener precaución, ya que no podemos usar que $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi\rho H$. Esto pues, hay 2 medios de permeabilidades diferentes, luego $\vec{H}_2 \neq \vec{H}_3$. Lo que sí, por condición de borde

$$B_2^{\perp} = B_3^{\perp}$$

que refiere a la componente perpendicular a la superficie. Notamos que la superficie está orientada en $\hat{\phi}$, por lo que la componente perpendicular (que debemos usar en la C.B) es la componente en $\hat{\phi}$. Como $\vec{B} = B\hat{\phi}$ únicamente, es posible concluir que



$$\vec{B}_2 = \vec{B}_3 \quad \Rightarrow \quad \mu_2\vec{H}_2 = \mu_3\vec{H}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H}_3 = \frac{\mu_2}{\mu_3}\vec{H}_2$$

Así, la integral cerrada del lado izq. de la ley de Ampère resulta

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_0^{\pi} H_3(\rho)\,\hat{\phi}\cdot\rho\, d\phi\,\hat{\phi} + \int_{\pi}^{2\pi} H_2(\rho)\,\hat{\phi}\cdot\rho\, d\phi\,\hat{\phi} = H_3(\rho)\,\rho\cancelto{\pi}{\int_0^{\pi} d\phi} + H_2(\rho)\,\rho\cancelto{\pi}{\int_{\pi}^{2\pi} d\phi} \qquad / \; H_3 = \frac{\mu_2}{\mu_3}H_2$$

$$= \frac{\mu_2 H_2}{\mu_3}\rho\pi + H_2\rho\pi = \rho\pi H_2(\rho)\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_3}\right)$$

Finalmente

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho\pi H_2\left(1+\frac{\mu_2}{\mu_3}\right) = I_0\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow H_2(\rho) = \frac{I_0\,\mu_3}{\rho\pi(\mu_2+\mu_3)}\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{H}_2(b<\rho<c) = \frac{I_0\,\mu_3}{\rho\pi(\mu_2+\mu_3)}\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)\hat{\phi}}$$

Y como $\vec{H}_3 = \vec{H}_2\,\frac{\mu_2}{\mu_3}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_3(b<\rho<c) = \frac{I_0\,\mu_2}{\rho\pi(\mu_2+\mu_3)}\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)\hat{\phi}}$$

Por otra parte, $\vec{B} = \mu_2\vec{H}_2 = \mu_3\vec{H}_3$, por lo que

$$\boxed{\vec{B}(b<\rho<c) = \frac{I_0\,\mu_2\,\mu_3}{\rho\pi(\mu_2+\mu_3)}\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)\hat{\phi}}$$

$\rho>c$ $\quad \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{libre}$ / $I_{libre} = I(\rho>c) = 0$; y como ahora estoy en el vacío, no tengo para qué separar la integral $\Rightarrow \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi\rho\, H(\rho)$

$$\Rightarrow 2\pi\rho\, H(\rho) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{H}(\rho>c) = 0} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(\rho>c) = 0}$$

c) Para calcular las corrientes de magnetización $\vec{K}_m$, primero debemos calcular $\vec{M}$, mediante

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \ ; \ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{B}\left(\frac{\mu-\mu_0}{\mu\mu_0}\right)$$

Así, dependiendo de la zona del espacio

$\rho<a$ $\quad \mu = \mu_1 \Rightarrow \vec{M}_1 = \cancel{\mu_1}\frac{I_0\rho}{2\pi a^2}\hat{\phi}\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\cancel{\mu_1}\mu_0}\right) \Leftrightarrow \vec{M}_1 = \frac{I_0\rho}{2\pi\mu_0 a^2}(\mu_1-\mu_0)\hat{\phi}$

$a<\rho<b$ $\quad \mu = \mu_0 \Rightarrow \vec{M} = 0$

$b < \rho < c$ Los medios están dispuestos tal que

$$\mu = \begin{cases} \mu_3, & 0 < \phi < \pi \\ \mu_2, & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

Luego, viendo por separado

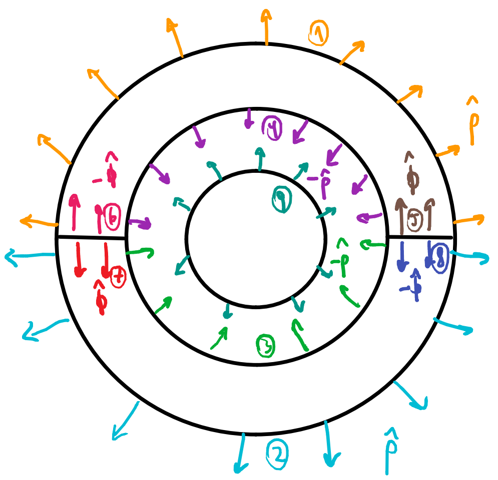
$\vec{M}_3$ $\quad \mu = \mu_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_3 = \dfrac{I_0 \mu_2 \cancel{\mu_3}}{\rho\pi(\mu_2+\mu_3)}\left(\dfrac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)\hat{\phi}\left(\dfrac{\mu_3-\mu_0}{\cancel{\mu_3}\mu_0}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{M}_3 = \frac{I_0 \mu_2}{\rho\pi}\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)\left(\frac{\mu_3-\mu_0}{\mu_2+\mu_3}\right)\hat{\phi}}$$

$\vec{M}_2$ $\quad \mu = \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_2 = \dfrac{I_0 \cancel{\mu_2} \mu_3}{\rho\pi(\mu_2+\mu_3)}\left(\dfrac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)\hat{\phi}\left(\dfrac{\mu_2-\mu_0}{\cancel{\mu_2}\mu_0}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{M}_2 = \frac{I_0 \mu_3}{\rho\pi}\left(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\right)\left(\frac{\mu_2-\mu_0}{\mu_2+\mu_3}\right)\hat{\phi}}$$

Notar que en todos los casos $\vec{M} = M\hat{\phi}$. Luego, las superficies se orientan según



Para que se entienda, cada superficie de cada color tendrá un número distinto, indicado en la figura, en la cual además se indican las orientaciones de estas.

Luego, como las superficies 5, 6, 7 y 8 están orientadas en $\pm\hat{\phi}$, $\vec{K}_M = 0$ en esas superficies (pues $\hat{\phi} \times \pm\hat{\phi} = 0$). Viendo el resto de superficies

1) $\vec{M} = \vec{M}_3(\rho=c)$, $\hat{n} = \hat{\rho} \Rightarrow \vec{K}_{M_1} = \vec{M}_3(\rho=c) \times \hat{\rho} = \dfrac{I_0 \mu_2}{c\pi}\left(\dfrac{c^2-c^2}{c^2-b^2}\right)\left(\dfrac{\mu_3-\mu_0}{\mu_2+\mu_3}\right)\hat{\phi} \times \hat{\rho}$

Ojo!! Evaluamos la magnetización en el punto donde se ubica la superficie

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{K}_{M_1} = 0}$$

2) $\vec{M} = \vec{M}_2(\rho=c)$, $\hat{n} = \hat{\rho} \Rightarrow \vec{K}_{M_2} = \vec{M}_2(\rho=c) \times \hat{\rho} = \dfrac{I_0 \mu}{c\pi}\left(\dfrac{c^2-c^2}{c^2-b^2}\right)\left(\dfrac{\mu_2-\mu_0}{\mu_2+\mu_3}\right)\hat{\phi} \times \hat{\rho}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{K}_{M_2} = 0}$$

3) $\vec{M} = \vec{M}_2(\rho = b)$, $\hat{n} = -\hat{\rho}$ $\Rightarrow$ $\vec{K}_{M_3} = \vec{M}_2(\rho=b) \times (-\hat{\rho}) = \dfrac{I_0\,\mu_3}{b\,\pi} \left(\cancelto{1}{\dfrac{c^2-b^2}{c^2-b^2}}\right)\left(\dfrac{\mu_2-\mu_0}{\mu_2+\mu_3}\right) \overbrace{\hat{\phi}\times(-\hat{\rho})}^{=\hat{k}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{K}_{M_3} = \frac{I_0\,\mu_3}{b\pi}\left(\frac{\mu_2-\mu_0}{\mu_2+\mu_3}\right)\hat{k}}$$

4) $\vec{M} = \vec{M}_3(\rho=b)$, $\hat{n} = -\hat{\rho}$ $\Rightarrow$ $\vec{K}_{M_4} = \vec{M}_3(\rho=b)\times(-\hat{\rho}) = \dfrac{I_0\,\mu_2}{b\,\pi}\left(\cancelto{1}{\dfrac{c^2-b^2}{c^2-b^2}}\right)\left(\dfrac{\mu_3-\mu_0}{\mu_2+\mu_3}\right)\overbrace{\hat{\phi}\times(-\hat{\rho})}^{=\hat{k}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{K}_{M_4} = \frac{I_0\,\mu_2}{b\pi}\left(\frac{\mu_3-\mu_0}{\mu_2+\mu_3}\right)\hat{k}}$$

9) $\vec{M} = \vec{M}_1(\rho = a)$, $\hat{n} = \hat{\rho}$ $\Rightarrow$ $\vec{K}_{M_9} = \vec{M}_1(\rho=a)\times\hat{\rho} = \dfrac{I_0\,\cancel{a}}{2\pi\mu_0 a^{\cancel{2}}}(\mu_1-\mu_0)\overbrace{\hat{\phi}\times\hat{\rho}}^{=-\hat{k}}$

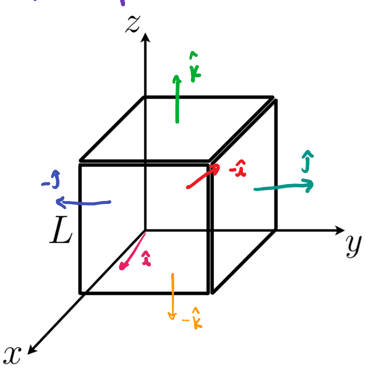
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{K}_{M_9} = -\frac{I_0}{2\pi\mu_0 a}(\mu_1-\mu_0)\hat{k}}$$

P2) Para calcular las corrientes de magnetización, usamos la magnetización dada. La corriente volumétrica se calcula según

$$\vec{J}_M = \nabla\times\vec{M} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & M_0\frac{x^2}{L^2}\end{vmatrix} = \underbrace{\hat{\imath}\left[\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial y}\left(M_0\frac{x^2}{L^2}\right)} - \frac{\partial}{\partial z}(0)\right]}_{=0} - \hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(M_0\frac{x^2}{L^2}\right) - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial z}(0)}\right] + \underbrace{\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(0)\right]}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{J}_M(x) = -2M_0\frac{x}{L^2}\hat{\jmath}}$$

Por otra parte, tenemos que encontrar 6 corrientes superficiales de magnetización, ya que el cubo tiene 6 caras. Sin embargo, las caras orientadas en $\hat{k}$ y $-\hat{k}$, correspondientes a las caras en $z=0$ y $z=L$ como $\vec{M}\perp\hat{n}$, se tendrá que



$$\boxed{\vec{K}_M(z=0,L) = \vec{M}\times\hat{n} = 0}$$

Por otra parte para la cara orientada en $\hat{\jmath}$ $(y=L)$

$$\boxed{\vec{K}_M(y=L) = M_0\frac{x^2}{L^2}\hat{k}\times\hat{\jmath} = -M_0\frac{x^2}{L^2}\hat{\imath}}$$

Para $-\hat{\jmath}$ $(y=0)$, es el mismo resultado pero en sentido opuesto

$$\boxed{\vec{K}_M(y=0) = M_0 \frac{x^2}{L^2}\hat{\imath}}$$

Luego, para la cara de orientación $\hat{\imath}$ $(x=L)$, se tiene que

$$\boxed{\vec{K}_M(x=L) = M_0 \frac{\cancel{L^2}}{\cancel{L^2}}\hat{k}\times\hat{\imath} = M_0\hat{\jmath}}$$

→ Notar que evaluamos la magnetización en $x=L$. No se hizo esto en casos anteriores pues x no era fijo.

Para $-\hat{\imath}$ $(x=0)$, se tiene que $\vec{M}(x=0)=0$, por lo que

$$\boxed{\vec{K}_M(x=0)=0}$$

Una vez calculadas todas las densidades de corriente, podemos calcular la corriente total que circula por el cubo, sumando la intensidad de corriente que circula por el volumen del cubo, junto a la que circula por cada cara

$$\Rightarrow I_{TOT} = \iint \vec{J}_M\cdot d\vec{S} + \cancelto{0}{\int\left(\vec{K}_M(x=0)\times\hat{n}\right)\cdot d\vec{l}} + \int\left(\vec{K}_M(x=L)\times\hat{n}\right)\cdot d\vec{l} + \int\left(\vec{K}_M(y=0)\times\hat{n}\right)\cdot d\vec{l}$$

$$+ \int\left(\vec{K}_M(y=L)\times\hat{n}\right)\cdot d\vec{l} + \cancelto{0}{\int\left(\vec{K}_M(z=0)\times\hat{n}\right)\cdot d\vec{l}} + \cancelto{0}{\int\left(\vec{K}_M(z=L)\times\hat{n}\right)\cdot d\vec{l}}$$

$$= \int_0^L\int_0^L -2M_0\frac{x}{L^2}\hat{\jmath}\cdot dx\,dz\,\hat{\jmath} + \int_0^L\left(M_0\hat{\jmath}\times\hat{\imath}\right)\cdot(-dz\,\hat{k}) + \int_0^L\left(M_0\frac{x^2}{L^2}\hat{\imath}\times(-\hat{\jmath})\right)\cdot(-dz\,\hat{k}) + \int_0^L\left(-M_0\frac{x^2}{L^2}\hat{\imath}\times\hat{\jmath}\right)\cdot dz\,\hat{k}$$

$$= -\frac{2M_0}{L^2}\int_0^L\int_0^L x\,dx\,dz + \int_0^L\left(\cancel{-}M_0\hat{k}\right)\cdot\left(\cancel{-}dz\,\hat{k}\right) + \int_0^L\left(\cancel{-}\frac{M_0x^2}{L^2}\hat{k}\right)\cdot\left(\cancel{-}dz\,\hat{k}\right) + \int_0^L -\frac{M_0x^2}{L^2}\hat{k}\cdot dz\,\hat{k}$$

Observación importante: En $\int(\vec{K}\cdot\hat{n})\cdot d\vec{l}$, uno considera los signos de $\hat{n}$ y del $d\vec{l}$ de manera que se conserve el signo de la dirección de corriente. Por ejemplo, en $\vec{K}_M(x=L)$ la corriente es positiva, luego $d\vec{l}=-dz\hat{k}$ para mantenerla positiva. Golazo, sí, pero créanme.

Sinceramente, para evitar complicaciones, tal como pueden hacer $\iint\vec{J}\cdot d\vec{S}=J\cdot A$, uno puede hacer $\int(\vec{K}\times\hat{n})\cdot d\vec{l}=K\cdot l$, con l el largo de la línea transversal por donde circula la corriente. En el caso de este problema, $l=L$.

$$\Rightarrow I_{tot} = -\frac{2M_0}{L^2}\underbrace{\int_0^L\int_0^L x\,dx\,dz}_{\frac{L^2}{2}\cdot L} + M_0\underbrace{\int_0^L dz}_{L} + \frac{M_0x^2}{L^2}\underbrace{\int_0^L dz}_{L} - \frac{M_0x^2}{L^2}\underbrace{\int_0^L dz}_{L}$$

$$= -\frac{\cancel{2}M_0}{\cancel{L^2}}\cdot\frac{L^{\cancel{3}}}{\cancel{2}} + M_0L + \cancel{\frac{M_0x^2}{L^2}}L - \cancel{\frac{M_0x^2}{L^2}}L = -M_0L + M_0L \iff \boxed{I_{TOT} = 0}$$

Lo cual era el resultado esperado, ya que son corrientes puramente de magnetización, y siempre deben sumar cero (tal como las cargas de polarización).