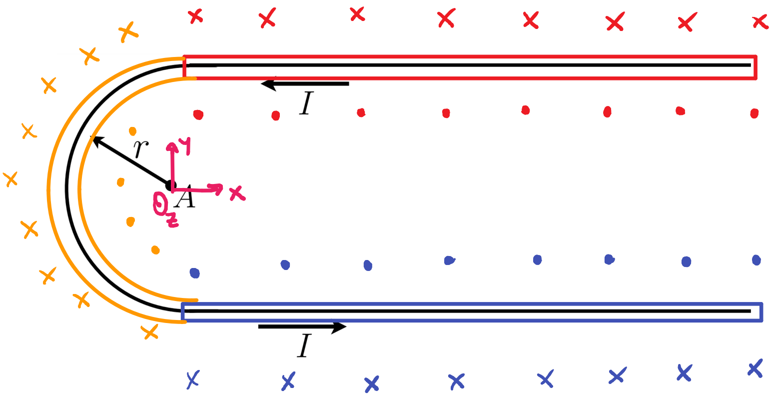
Auxiliar 8

P1) Dado que el campo magnético cumple el principio de superposición, es posible calcular el campo en A como la superposición del campo generado por el cable superior, el cable circular y el cable inferior.



$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_{sup} + \vec{B}_{circ} + \vec{B}_{inf}$$

Antes de comenzar el problema, es bueno anticipar la dirección del campo magnético, en virtud de la circulación de la corriente. Siguiendo la regla de la mano derecha, en la figura se indica la dirección de este, recordando que × representa que entra, y • que sale.

Así, en el punto A todos los campos salen del plano, por lo que el campo neto tiene la dirección de $\hat{k}$, según el SR escogido. De igual manera, es importante notar que, por simetría

$$\vec{B}_{sup}(\vec{r}=A) = \vec{B}_{inf}(\vec{r}=A)$$

es decir, el cable de arriba produce el mismo campo en A que el cable de abajo. Esto es ya que el punto A es equidistante de ambos, y si bien en el cable de abajo la corriente circula en sentido opuesto, es por esto mismo que el campo $\vec{B}_{inf} = B_{inf}\hat{k}$, por lo que no se anula $\vec{B}_{sup}$. Luego

$$\vec{B} = 2\vec{B}_{cable} + \vec{B}_{circ}.$$

Y basta calcular el campo de sólo 1 de los cables. En particular, calcularemos el del cable de arriba, que se parametriza como

$$\vec{r}\,' = x\hat{\imath} + r\hat{\jmath} \quad ; \quad x \in [\infty, 0]^{*}$$ (Cable muy largo se aproxima ∞)

Como se quiere el campo en A, donde está el origen, $\vec{r}=0$. El elemento de línea, dada la parametrización del cable, es

$$d\vec{l} = dx\,\hat{\imath}^{*}$$

De esta manera, sustituyendo en la ley de Biot-Savart, se tendrá que

* : Ojo! Uno puede pensar que como la corriente viene desde $x=\infty$ hasta $x=0$, entonces $d\vec{l} = -dx\hat{\imath}$. Eso es válido, pero teniendo ojo con el orden de los límites de la integral, por ejemplo, notar que que $x \in [\infty, 0]$, y no $x \in [0, \infty)$ como suele ser. Volveré a esto más adelante

$$\vec{B}_{cable} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\infty}^{0} \frac{I\,dx\,\hat{\imath} \times (0-(x\hat{\imath}+r\hat{\jmath}))}{\|0-(x\hat{\imath}+r\hat{\jmath})\|^3}$$

$(I\,dx\,\hat{\imath}) \times (-x\hat{\imath}) = 0$

Notar que elegimos $d\vec{l} = dx\,\hat{\imath}$, pero la integral la hacemos de ∞ a 0, pues la corriente viene desde ahí. La otra opción, como se mencionó antes, es escoger $d\vec{l} = -dx\,\hat{\imath}$, pero la integral de 0 a ∞, es decir, $\int_0^\infty$.

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\infty}^{0} \frac{I\,dx\cdot(-r)\,(\cancel{\hat{\imath}\times\hat{\jmath}})^{\hat{k}}}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I r}{4\pi}\hat{k}\int_{x=\infty}^{x=0} \frac{dx}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

CV: $x = r\tan\theta \Rightarrow dx = r\sec^2\theta\, d\theta$

$$= -\frac{\mu_0 I r}{4\pi}\hat{k}\int_{\theta=\pi/2}^{\theta=0} \frac{r\sec^2\theta\, d\theta}{(r^2\tan^2\theta + r^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I \cancel{r}}{4\pi}\hat{k}\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cancel{r}\,\sec^2\theta}{r^{\cancel{3}}\,(\underbrace{\tan^2\theta+1}_{=\sec^2\theta})^{3/2}}\, d\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\hat{k}\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cancel{\sec^2\theta}}{\sec^3\theta}\, d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\hat{k}\int_{\pi/2}^{0} \frac{d\theta}{\sec\theta}$$

$$\Leftrightarrow \vec{B}_{cable} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\hat{k}\,\cancel{\int_{\pi/2}^{0} \cos\theta\, d\theta}^{\,\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1} \Leftrightarrow \vec{B}_{cable} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\hat{k}$$

Luego, para el cable circular, este se parametriza mediante

$$\vec{r} = r\hat{\rho}, \quad \phi \in [\pi/2, 3\pi/2] \Rightarrow d\vec{l} = r\,d\phi\,\hat{\phi}$$

Nuevamente, $\vec{r} = 0$. Sustituyendo en la ley de Biot-Savart, se tiene que

$$\vec{B}_{circ} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{I\,r\,d\phi\,\hat{\phi} \times (0 - r\hat{\rho})}{\underbrace{\|0-r\hat{\rho}\|^3}_{=r^3}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{-I r^{\cancel{2}}\, d\phi\, (\cancel{\hat{\phi}\times\hat{\rho}})^{-\hat{k}}}{r^{\cancel{3}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\hat{k}\,\cancel{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\phi}^{\,\pi}$$

$$\Leftrightarrow \vec{B}_{circ} = \frac{\mu_0 I}{4 r}\hat{k}$$

Así, el campo magnético total en A se obtiene como

$$\vec{B} = 2\vec{B}_{cable} + \vec{B}_{circ} = \cancel{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{\underset{2}{\cancel{4}}\pi r}\hat{k} + \frac{\mu_0 I}{4r}\hat{k} \Leftrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\hat{k}}$$

P2) a) La densidad superficial σ en rotación genera una corriente superficial $\vec{K}$, tal que

$$\vec{K} = \sigma\vec{v}$$

Como gira con $\omega = cte$, expresando en cilíndricas se tiene que

$$\vec{v} = \omega\rho\hat{\phi} \Rightarrow \vec{K} = \sigma\omega\rho\hat{\phi}$$

De igual manera, necesitamos parametrizar el disco, pues es por este que la corriente $\vec{K}$ circula. Así, el disco se parametriza como

$$\vec{r}\,' = \rho\hat{\rho} \quad ; \quad \underbrace{\rho\in[0,R] \ , \ \phi\in[0,2\pi]}$$

estos determinan la integral $\Rightarrow dS = \rho\, d\rho\, d\phi$

Y, como se quiere el campo en un punto arbitrario sobre el eje de giro (es decir, el eje z), $\vec{r} = z\hat{k}$. Sustituyendo en ley de Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{\vec{K}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\,dS = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\sigma\omega\rho\hat{\phi}\times(z\hat{k}-\rho\hat{\rho})}{\|z\hat{k}-\rho\hat{\rho}\|^3}\,\rho\, d\rho\, d\phi$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho z\,\cancel{(\hat{\phi}\times\hat{k})}^{\hat{\rho}}}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,\rho\, d\rho\, d\phi - \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho^2\,\cancel{(\hat{\phi}\times\hat{\rho})}^{-\hat{k}}}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,\rho\, d\rho\, d\phi\right]$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi}\left[z\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho\hat{\rho}}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,d\rho\, d\phi + \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho^3\hat{k}}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,d\rho\, d\phi\right]$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi}\left[z\left(\cancel{\int_0^{2\pi}\hat{\rho}\,d\phi}^{\,0}\right)\left(\int_0^R \frac{\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,d\rho\right) + \hat{k}\left(\cancel{\int_0^{2\pi}d\phi}^{\,2\pi}\right)\left(\int_0^R \frac{\rho^3\hat{k}}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,d\rho\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega\hat{k}}{\underset{2}{\cancel{4}}\pi}\cdot\cancel{2}\pi\cdot\int_{\rho=0}^{\rho=R}\frac{\rho^3}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,d\rho$$

/ CV: $\rho = z\tan\theta \Rightarrow d\rho = z\sec^2\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\hat{k}\int_{\theta=0}^{\theta=\arctan\left(\frac{R}{z}\right)} \frac{z^3\tan^3\theta}{(z^2+z^2\tan^2\theta)^{3/2}} \cdot z\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\hat{k}\int_0^{\arctan\left(\frac{R}{z}\right)} \frac{\cancel{z^3}\tan^3\theta}{\cancel{z^3}\underbrace{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}_{\sec^3\theta}}\, z\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\hat{k}\int_0^{\arctan(R/z)} \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\hat{k}\int_0^{\arctan(R/z)}\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$\operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\hat{k}\int_0^{\arctan(R/z)}\frac{\operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\hat{k}\left(\underbrace{\int_0^{\arctan(R/z)}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta}_{(*)} - \underbrace{\int_0^{\arctan(R/z)}\operatorname{sen}\theta\,d\theta}_{(**)}\right)$$

CV: $u = \cos\theta \Rightarrow du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$$(*):\ \int_{\theta=0}^{\theta=\arctan(R/z)}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_{u=1}^{u=\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}}\frac{-du}{u^2} = \left.\frac{1}{u}\right|_1^{\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}} = \frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z} - 1$$

$$(**):\ \int_0^{\arctan(R/z)}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \left.-\cos\theta\right|_0^{\arctan(R/z)} = 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Así, se tiene que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\hat{k}\left[\frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z} - 1 - \left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\right] = \frac{\mu_0\sigma\omega z}{2}\left(\frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z} + \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2\right)\hat{k}$$

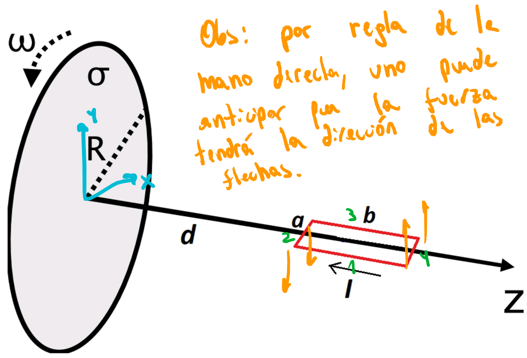
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left(\frac{R^2+2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2z\right)\hat{k}}$$

b) Una vez calculado el campo, podemos calcular la fuerza sobre la espira, usando que

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \vec{F} = \oint I\,d\vec{l}\times\vec{B}$$

(cerrada pues la espira es un camino cerrado).

Al ser una espira rectangular, la integral la dividimos en 4 tramos, según los 4 lados de la espira. A priori, según los ejes escogidos, para los lados en el campo cambia de expresión de acuerdo a lo calculado en a) que era el campo calculado para un punto en el eje z. Sin embargo, como $a << R$, podemos asumir que estamos muy cerca del eje z, por lo que la expresión para el campo no cambia.



Obs: por regla de la mano derecha, uno puede anticipar que la fuerza tendrá la dirección de las flechas.

Así, calculando la integral

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_1 I d\vec{l} \times \vec{B} + \int_2 I d\vec{l} \times \vec{B} + \int_3 I d\vec{l} \times \vec{B} + \int_4 I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Luego, vemos c/ integral por separado.

1) En este caso, el camino se parametriza mediante

$$\vec{r} = -\frac{a}{2}\hat{\imath} + z\hat{k} \ , \quad z \in [d, d+b] \Rightarrow d\vec{l} = dz\,\hat{k}$$

Pero como $\vec{B} = B\hat{k}$,

$$d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_1 I d\vec{l} \times \vec{B} = 0} \quad / \ \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

2) La parametrización acá es

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + d\hat{k} \ , \quad x \in [-a/2, a/2] \Rightarrow d\vec{l} = dx\,\hat{\imath}$$

De manera que

$$\int_2 I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{-a/2}^{a/2} I dx\,\hat{\imath} \times \overbrace{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\left(\frac{R^2+2d^2}{\sqrt{R^2+d^2}} - 2d\right)\hat{k}}^{\text{Usamos } \vec{B}(z=d)} \overset{\hat{\imath}\times\hat{k} = -\hat{\jmath}}{=} -\frac{\mu_0 \sigma \omega I}{2}\left(\frac{R^2+d^2}{\sqrt{R^2+d^2}} - 2d\right)\hat{\jmath} \ \cancelto{a}{\int_{-a/2}^{a/2} dx}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_2 I d\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0 \sigma \omega I a}{2}\left(\frac{R^2+2d^2}{\sqrt{R^2+d^2}} - 2d\right)\hat{\jmath}}$$

3) Similar a lo que ocurre en 1, la parametrización es la sgte

$$\vec{r} = \frac{a}{2}\hat{\imath} + z\hat{k} \ , \quad z \in [d, d+b] \Rightarrow d\vec{l} = dz\,\hat{k} \Rightarrow d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \quad / \ \vec{B} = B\hat{k} \wedge \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_3 I d\vec{l} \times \vec{B} = 0}$$

4) Similar a 2, únicamente que ahora $z=d+b$, y que la corriente fluye en sentido opuesto, por lo que

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + (d+b)\hat{k} \quad , \quad x \in \left[a/2, -a/2 \right] \Rightarrow d\vec{l} = dx\,\hat{\imath}$$

De manera que

$$\int_4 I\,d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{a/2}^{-a/2} I\,dx\,\hat{\imath} \times \overbrace{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\left(\frac{R^2+2(d+b)^2}{\sqrt{R^2+(d+b)^2}} - 2(d+b) \right)\hat{k}}^{\text{Usamos } \vec{B}(z=d+a)} = -\frac{\mu_0 \sigma \omega I}{2}\left(\frac{R^2+2(d+b)^2}{\sqrt{R^2+(d+b)^2}} - 2(d+b) \right)\hat{\jmath} \xcancel{\int_{a/2}^{-a/2} dx}^{\,-a}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_4 I\,d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega I a}{2}\left(\frac{R^2+2(d+b)^2}{\sqrt{R^2+(d+b)^2}} - 2(d+b) \right)\hat{\jmath}}$$

De esta manera, la fuerza sobre la espira es

$$\vec{F} = \int_2 I\,d\vec{l} \times \vec{B} + \int_4 I\,d\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0 \sigma \omega I a}{2}\left(\frac{R^2+2d^2}{\sqrt{R^2+d^2}} - 2d \right)\hat{\jmath} + \frac{\mu_0 \sigma \omega I a}{2}\left(\frac{R^2+2(d+b)^2}{\sqrt{R^2+(d+b)^2}} - 2(d+b) \right)\hat{\jmath}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{\mu_0 \sigma \omega a I}{2}\left(\frac{R^2+2(d+b)^2}{\sqrt{R^2+(d+b)^2}} - \frac{R^2+2d^2}{\sqrt{R^2+d^2}} - 2b \right)\hat{\jmath}}$$