Pauta Aux. 6

P1) Considerando que el sistema esté en estadio estacionario (no hay carga saliendo o entrando a la esfera), se tiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Dado que $\vec{J}$ es proporcional a $\vec{E}$ ($\vec{J} = \rho \vec{E}$), los argumentos de simetría usados en la unidad anterior pueden ser usados nuevamente, por lo que

$$\vec{J} = J(r)\,\hat{r} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 J) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow r^2 J = C$$ → cte. de integración!

A priori, $C = C(\theta,\phi)$, pues se trata de una derivada parcial. Sin embargo, si $C = C(\theta,\phi) \Rightarrow \vec{J} = J(r,\theta,\phi)$, lo cual no se cumple por simetría. Luego, $C = $ cte. Así

$$J = \frac{C}{r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{C}{r^2}\,\hat{r}}$$

A continuación, por ley de Ohm local, se tiene que

$$\vec{J} = \rho \vec{E} \Leftrightarrow \frac{C}{r^2}\,\hat{r} = \rho \vec{E}$$ / $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$, por simetría

$$\Leftrightarrow \frac{C}{r^2}\,\hat{r} = \rho E(r)\,\hat{r}$$ / $\rho = KE$ por enunciado

$$\Rightarrow \frac{C}{r^2} = KE^2 \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \sqrt{\frac{C}{K}}\,\frac{1}{r}\,\hat{r}}$$

Luego, ya que la diferencia de potencial entre $r = a$ y $r = b$ es conocida e igual a V, se tiene que

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \overset{!}{=} V$$

(es $V_a - V_b$ y no $V_b - V_a$ porque el borne positivo de la batería está en $r=a$, y el negativo en $r=b$)

$$\Leftrightarrow -\int_b^a \sqrt{\frac{C}{K}}\,\frac{1}{r}\,\cancel{\hat{r}} \cdot dr\,\cancel{\hat{r}} = V$$

$$\Leftrightarrow V = -\sqrt{\frac{C}{K}}\underbrace{\int_b^a \frac{dr}{r}}_{\ln(a/b)} = -\sqrt{\frac{C}{K}}\ln\left(\frac{a}{b}\right) \Leftrightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{C}{K}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

A partir de este resultado, se puede despejar C, tal que

$$\boxed{C = \frac{KV^2}{\ln^2(b/a)}}$$

Sustituyendo el valor de C en $\vec{J}$, se obtiene que

recordar que esto se puede ssi hay simetría!

$$\vec{J} = \frac{KV^2}{\ln^2(b/a)} \cdot \frac{1}{r^2}\hat{r} \Rightarrow I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S} = J\cdot A$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{KV^2}{\ln^2(b/a)} \cdot \frac{1}{\cancel{r^2}} \cdot 4\pi \cancel{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I = \frac{4\pi K V^2}{\ln^2(b/a)}}$$

Para calcular la densidad de carga, podemos usar la ley de Gauss en su forma diferencial

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \rho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}$$

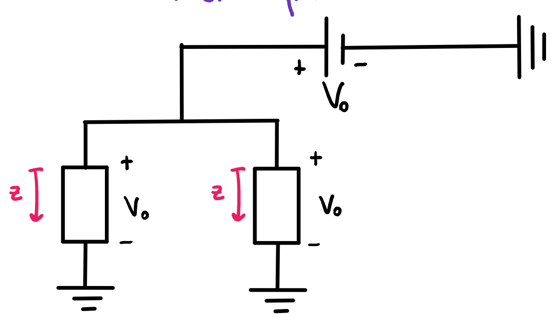
Como la expresión para $\vec{E}$ que tenemos corresponde a la zona entre la esfera y el cascarón, al usar la ecuación antes planteada obtendremos la densidad de carga en dicha zona. Así

$$\vec{E}(r) = \sqrt{\frac{C}{K}}\,\frac{1}{r}\hat{r} = \sqrt{\frac{\cancel{K}V^2}{\ln^2(b/a)}\cdot\frac{1}{\cancel{K}}}\;\frac{1}{r}\hat{r} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{V}{r\ln(b/a)}\hat{r}}$$

Luego

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\cancel{2}}\frac{V}{\cancel{r}\ln(b/a)}\right) \Leftrightarrow \boxed{\rho = \frac{\varepsilon_0 V}{r^2 \ln(b/a)}}$$

P2) a) A partir del circuito mostrado en la figura, notamos que los condensadores están conectados en paralelo, luego, están los dos sometidos al mismo potencial.



Luego, en ambos condensadores, consideraremos la referencia desde arriba y positiva hacia abajo. Acá realmente da lo mismo el SR escogido, sólo cambiarán las direcciones de $\vec{J}$, $\vec{E}$ y $\vec{D}$.

Luego, considerando que el sistema está en estado estacionario (no hay fugas de carga en el dieléctrico ni esta se acumula en él), se tiene entonces que, tanto para el condensador izquierdo como el derecho

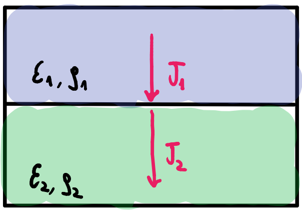
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Como se desprecian los efectos de borde, podemos asumir simetría de plano infinito, de manera que

$$\vec{E} = E\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = J\hat{k}$$

Antes de sustituir este resultado en $\nabla \cdot \vec{J}$, recordemos que cada condensador está hecho de 2 materiales distintes c/u, y en disposiciones diferentes. Por ello, hay que analizar cómo es la corriente y el campo en c/u, pensando en las condiciones de borde.

Condensador izq



Notar que la componente perpendicular de la corriente

$$J^{\perp} = J_z$$

es decir, toda la corriente es perpendicular a la interfaz (es de esperarse, pues no hay corriente en $\hat{x}$ ni en $\hat{y}$). Luego, aplicando la condición de borde para corriente, se tiene que

$$J_1^{\perp} = J_2^{\perp} \quad \Rightarrow \quad J_{1_z} = J_{2_z} \Rightarrow \vec{J}_1 = \vec{J}_2$$

J_1 y J_2 tienen la misma componente vertical.

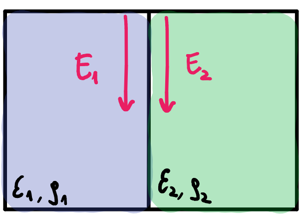
Luego, como la corriente tiene sólo componente vertical, el vector de corriente es el mismo en 1 y en 2.

Es decir, la corriente es la misma en los dos medios (la llamamos simplemente $\vec{J}$).

Condensador der

Ahora, para la componente paralela del campo

$$E^{\parallel} = E_z$$



es decir, todo el campo es paralelo a la interfaz (lo sabíamos, pues no hay campo en $\hat{x}$ ni en $\hat{y}$). Luego, aplicando la condición de borde para la componente paralela del campo, se tiene que

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \quad \Rightarrow \quad E_{1_z} = E_{2_z} \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

→ Misma conclusión que para el caso anterior, al campo lo llamamos simplemente $\vec{E}$.

E_1 y E_2 tienen la misma componente vertical

Como el campo es puramente vertical, el vector campo eléctrico es igual en ambos medios.

Teniendo en consideración las diferencias entre el condensador izq. y el der, calcularemos $\vec{J}$, $\vec{E}$ y $\vec{D}$ por separado, para c/ condensador.

Izq.) Retomando que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, y $\vec{J} = J\hat{k}$, se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial J}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{J} = C\hat{k}$$

Nuevamente, a priori, sabemos que $C = C(x,y)$. Sin embargo, tal como en la P1, sabemos que esto no puede ser así, pues en ese caso $\vec{J} = J(x,y)\hat{k}$, con lo que no habría simetría. Luego, $C = \text{cte}$. A continuación, por Ley de Ohm local

$$\vec{J} = g_1 \vec{E}_1 = g_2 \vec{E}_2$$

(esto pues, recordemos, la corriente es la misma en ambos medios).

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\vec{J}}{g_1} = \frac{C}{g_1}\hat{k}} \qquad \boxed{\vec{E}_2 = \frac{\vec{J}}{g_2} = \frac{C}{g_2}\hat{k}}$$

válida para $z \in [0,d]$ — válida para $z \in [d,2d]$

Luego, una vez conocida la expresión para $\vec{E}$ dentro del condensador, calculamos el potencial entre los extremos del condensador (que sabemos es V_0).

$$\Rightarrow -\int_{z=2d}^{z=0} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \doteq V_0 \Leftrightarrow -\int_{2d}^{d} E_2\hat{k}\cdot dz\hat{k} - \int_{d}^{0} E_1\hat{k}\cdot dz\hat{k} = V_0$$

Se escogieron estos límites pues la referencia ($V=0$) está en $z=2d$ (la conexión a tierra mostrada en la figura). Luego, ese debe ser el límite inferior de la integral.

$$\Leftrightarrow -\int_{2d}^{d} \frac{C}{g_2}dz - \int_{d}^{0}\frac{C}{g_1}dz = V_0$$

$$\Leftrightarrow +\frac{C}{g_2}\cancelto{+d}{\int_{2d}^{d} dz} + \frac{C}{g_1}\cancelto{+d}{\int_{d}^{0} dz} = V_0$$

$$\Leftrightarrow Cd\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right) = V_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{V_0}{d\left(\frac{1}{g_1}+\frac{1}{g_2}\right)} = \frac{V_0\, g_1 g_2}{d\,(g_1+g_2)}}$$

Una vez conocido C, es posible sustituir en las expresiones encontradas para $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y $\vec{J}$ (el mismo en ambos medios, recordar).

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{V_0\, \cancel{g_1} g_2}{d\,(g_1+g_2)}\cdot\frac{1}{\cancel{g_1}}\hat{k} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{V_0\, g_2}{d\,(g_1+g_2)}\hat{k}} \; ; \; \vec{E}_2 = \frac{V_0\, g_1 \cancel{g_2}}{d\,(g_1+g_2)}\cdot\frac{1}{\cancel{g_2}}\hat{k} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \frac{V_0\, g_1}{d\,(g_1+g_2)}\hat{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{V_0\, \sigma_1 \sigma_2}{d\,(\sigma_1+\sigma_2)}\,\hat{k}}$$

Finalmente, recordando que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, se tendrá que

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 \Leftrightarrow \boxed{\vec{D}_1 = \frac{V_0\, \sigma_2\, \varepsilon_1}{d\,(\sigma_1+\sigma_2)}\,\hat{k}} \quad ; \quad \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 \Leftrightarrow \boxed{\vec{D}_2 = \frac{V_0\, \sigma_1\, \varepsilon_2}{d\,(\sigma_1+\sigma_2)}\,\hat{k}}$$

Der) En este caso, nuevamente por $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ y $\vec{J} = J\hat{k}$, para c/medio se tendrá que

$$\nabla \cdot \vec{J}_1 = \frac{\partial J_1}{\partial z} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{J}_1 = C_1 \hat{k} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{J}_2 = \frac{\partial J_2}{\partial z} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{J}_2 = C_2 \hat{k}$$

Tal como antes, C_1 y C_2 deben ser ctes. Son constantes distintas pues $\vec{J}_1 \neq \vec{J}_2$, a diferencia del caso anterior. Lo que sí, es que $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$, por lo que a partir de la Ley de Ohm local, se tiene que

$$\vec{J}_1 = \sigma_1 \vec{E} \quad ; \quad \vec{J}_2 = \sigma_2 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}_1}{\sigma_1} = \frac{\vec{J}_2}{\sigma_2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E} = \frac{C_1}{\sigma_1}\hat{k} = \frac{C_2}{\sigma_2}\hat{k}$$

i.e., $\vec{E} =$ ctte. Luego, al calcular el potencial, puede salir de la integral. Análogo a lo hecho para el condensador izq.

$$V_0 \overset{!}{=} -\int_{z=2d}^{z=0} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{2d}^{0} E\hat{k} \cdot dz\,\hat{k} = +E \int_{0}^{2d} dz = E \cdot 2d$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{V_0}{2d} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{V_0}{2d}\,\hat{k}}$$

Luego, cada corriente está dada por

$$\boxed{\vec{J}_1 = \frac{\sigma_1 V_0}{2d}\,\hat{k}} \quad ; \quad \boxed{\vec{J}_2 = \frac{\sigma_2 V_0}{2d}\,\hat{k}}$$

Recordando que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, cada desplazamiento está dado por

$$\boxed{\vec{D}_1 = \frac{V_0\, \varepsilon_1}{2d}\,\hat{k}} \quad ; \quad \boxed{\vec{D}_2 = \frac{V_0\, \varepsilon_2}{2d}\,\hat{k}}$$

b) Para calcular las cargas de polarización, se debe obtener el vector polarización. A partir de $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$ y $\vec{E}$, se tiene que

$$\Rightarrow \vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$= \frac{V_0 \varepsilon_1}{2d}\hat{k} - \varepsilon_0 \frac{V_0}{2d}\hat{k}$$

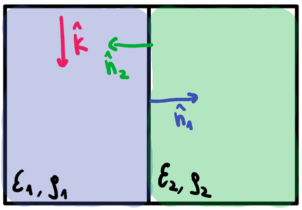
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{P}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}\hat{k}}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$= \frac{V_0 \varepsilon_2}{2d}\hat{k} - \varepsilon_0 \frac{V_0}{2d}\hat{k}$$

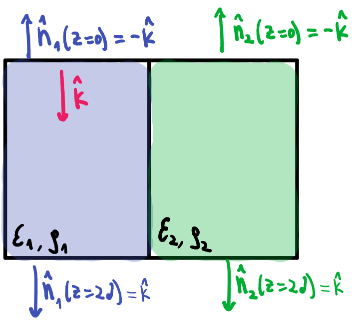
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{P}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}\hat{k}}$$

Notar que, por la dirección de $\vec{P}$ en ambos casos, la carga sólo existe en las superficies del dieléctrico en $z=0$ y $z=2d$, no en la interfaz intermedia que los separa. Esto pues esa superficie está orientada según $\hat{n}$ tal que



$$\left.\begin{aligned} \hat{n}_1 \cdot \hat{k} = 0 \Rightarrow \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1 = 0 \\ \hat{n}_2 \cdot \hat{k} = 0 \Rightarrow \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_p(\text{en esa superficie}) = 0$$

Luego, calculando la carga de polarización donde esta sí existe

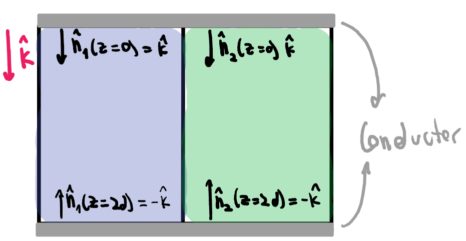


$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \sigma_{p_1}(z=0) = \vec{P}_1 \cdot -\hat{k} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d}\hat{k} \cdot -\hat{k} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d} \\ &\Rightarrow \sigma_{p_1}(z=2d) = \vec{P}_1 \cdot \hat{k} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d} \\ &\Rightarrow \sigma_{p_2}(z=0) = \vec{P}_2 \cdot -\hat{k} = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d} \\ &\Rightarrow \sigma_{p_2}(z=2d) = \vec{P}_2 \cdot \hat{k} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{V_0}{2d} \end{aligned}}$$

Como $\vec{P}_1, \vec{P}_2 = \text{cte}$, $-\nabla \cdot \vec{P}_1 = -\nabla \cdot \vec{P}_2 = 0$, por lo que

$$\boxed{\rho_{p_1} = \rho_{p_2} = 0}$$

Para calcular las densidades de carga libre, se sigue un proceso análogo, únicamente que usando $\vec{D}$ en lugar de $\vec{P}$, y considerando otras normales. Recordar que para las cargas libres se usa la normal exterior del conductor (antes era la normal exterior del dieléctrico). Luego usando que



$$\sigma_\ell = \vec{D} \cdot \hat{n}$$

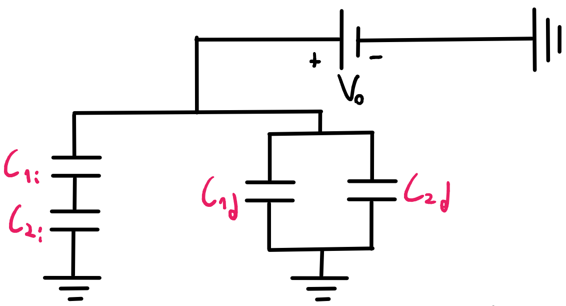
con $\hat{n}$ las normales indicadas en la figura, tendremos que

$$\boxed{\begin{aligned}
&\Rightarrow \sigma_{l_1}(z=0) = \vec{D}_1\cdot\hat{k} = \varepsilon_1 \frac{V_0}{2d}\hat{k}\cdot\hat{k} = \frac{\varepsilon_1 V_0}{2d}\\
&\Rightarrow \sigma_{l_1}(z=2d) = \vec{D}_1\cdot -\hat{k} = -\frac{\varepsilon_1 V_0}{2d}\\
&\Rightarrow \sigma_{l_2}(z=0) = \vec{D}_2\cdot\hat{k} = \frac{\varepsilon_2 V_0}{2d}\\
&\Rightarrow \sigma_{l_2}(z=2d) = \vec{D}_2\cdot -\hat{k} = -\frac{\varepsilon_2 V_0}{2d}
\end{aligned}}$$

Luego, análogo al caso de la polarización, se tiene que $\vec{D}_1, \vec{D}_2 = \text{cte}$, por lo que

$$\nabla\cdot\vec{D}_1 = \nabla\cdot\vec{D}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_{l_1} = \rho_{l_2} = 0}$$

c) Como se mencionó al inicio, los condensadores izq. y der. están conectados en paralelo. Además de eso, se ve que, como en el condensador izq los materiales dieléctricos están uno a continuación del otro, este se puede considerar como dos condensadores en serie. De igual manera, el condensador der, se puede considerar como dos condensadores en paralelo, al estar uno al lado del otro, y dividir la corriente en c/medio. Así, un esquema circuital del sistema es



Donde C_1 y C_2 son la capacitancias de los condensadores con dieléctrico de constante ε_1 y ε_2, respectivamente. Como son condensadores de placas paralelas, $C = \varepsilon A/L$. Así, se tiene que

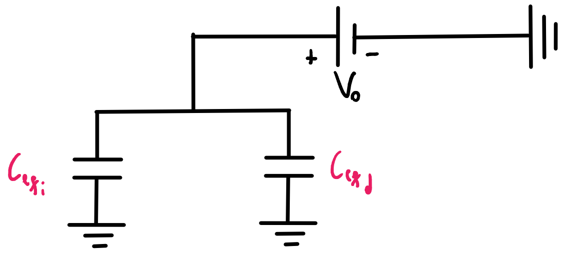
$$C_{1_i} = \frac{\varepsilon_1\cdot 4a^2}{d} \quad ; \quad C_{2_i} = \frac{\varepsilon_2\cdot 4a^2}{d} \quad ; \quad C_{1d} = \frac{\varepsilon_1\cdot 2a^2}{2d} ; \quad C_{2d} = \frac{\varepsilon_2\cdot 2a^2}{2d}$$

donde $L = d$ y $A = 4a^2$ se obtienen de las dimensiones dadas en el enunciado y la figura. Luego la capacitancia equivalente de cada condensador, izq y der, está dada por

$$C_{eq_i} = \left(\frac{1}{C_{1_i}} + \frac{1}{C_{2_i}}\right)^{-1} = \left(\frac{d}{4\varepsilon_1 a^2} + \frac{d}{4\varepsilon_2 a^2}\right)^{-1} = \frac{4a^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \qquad \text{(En serie)}$$

$$C_{eq_d} = C_{1d} + C_{2d} = \frac{\cancel{2}\varepsilon_1 a^2}{\cancel{2}d} + \frac{\cancel{2}\varepsilon_2 a^2}{\cancel{2}d} = \frac{a^2}{d}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \qquad \text{(Paralelo)}$$

De manera que el circuito se reduce a



Como C_{eq_i} y C_{eq_d} están en paralelo, la capacitancia equivalente del sistema completo se obtiene mediante

$$C_{eq} = C_{eq_i} + C_{eq_d}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{4a^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{a^2}{d}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

d) Para obtener la corriente que sale por la fuente, basta con sumar la corriente que pasa por c/ condensador,

$$I_{TOT} = I_i + I_d$$

Calculando c/u

$$I_i = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S} \overset{\text{Simetría}}{=} J\cdot A = \frac{V_0\,\sigma_1\sigma_2}{d(\sigma_1+\sigma_2)} \cdot \overset{\text{área total del condensador}}{4a^2} \Leftrightarrow I_i = \frac{4V_0\,\sigma_1\sigma_2\, a^2}{d(\sigma_1+\sigma_2)}$$

$$I_d = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint \vec{J}_1\cdot d\vec{S}_1}_{\text{mitad izquierda del condensador}} + \underbrace{\iint \vec{J}_2\cdot d\vec{S}}_{\text{mitad derecha del condensador}} = J_1 A_1 + J_2 A_2 = \frac{\sigma_1 V_0}{\cancel{2}d}\cdot\cancel{2}a^2 + \frac{\sigma_2 V_0}{\cancel{2}d}\cdot\cancel{2}a^2$$

$$\Leftrightarrow I_d = \frac{V_0 a^2}{d}(\sigma_1+\sigma_2)$$

Así, la corriente total que circula por el circuito, i.e. la corriente que sale de la fuente, es

$$\boxed{I_{tot} = \frac{4V_0\,\sigma_1\sigma_2\, a^2}{d(\sigma_1+\sigma_2)} + \frac{V_0 a^2}{d}(\sigma_1+\sigma_2) = \frac{V_0 a^2}{d}\left(\frac{4\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} + \sigma_1+\sigma_2\right)}$$

Tal que, por ley de Ohm, la resistencia se obtiene mediante

$$R = \frac{V_0}{I} \Leftrightarrow R = \frac{\cancel{V_0}}{\frac{\cancel{V_0} a^2}{d}\left(\frac{4\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} + \sigma_1+\sigma_2\right)} \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{d}{a^2\left(\frac{4\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} + \sigma_1+\sigma_2\right)}}$$