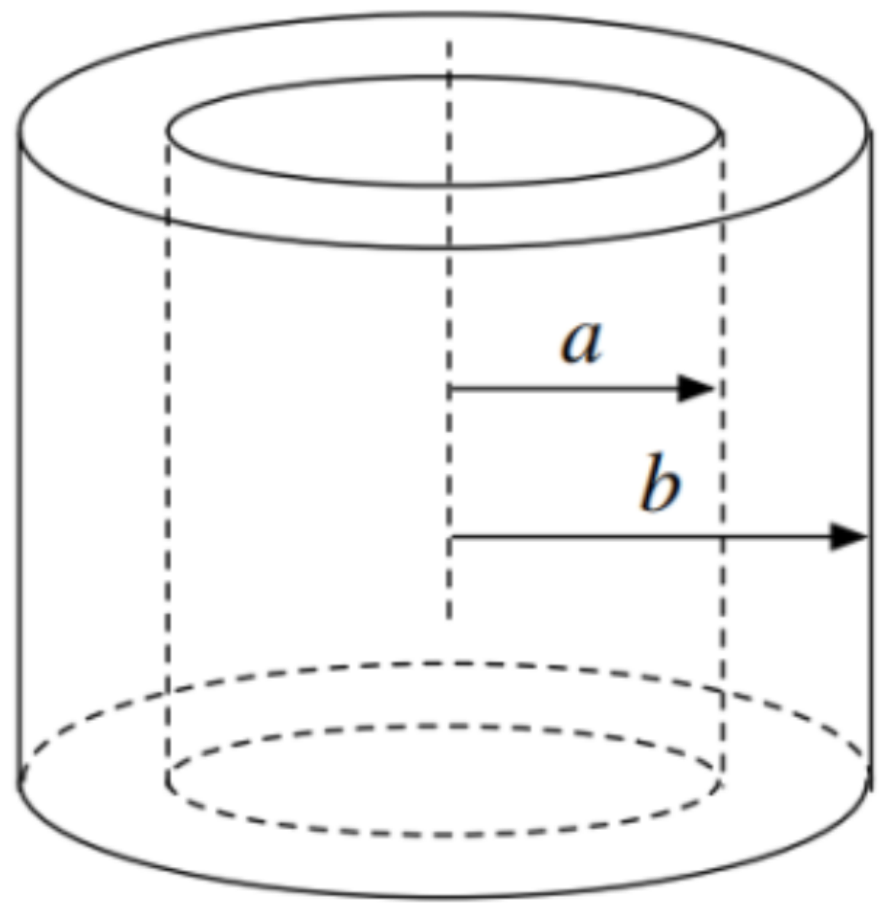
P1. Se tiene un conductor en la forma de una capa cilíndrica recta, infinita, de radio interior a y radio exterior b. Este conductor tiene una densidad de corriente que, expresada en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z), es:

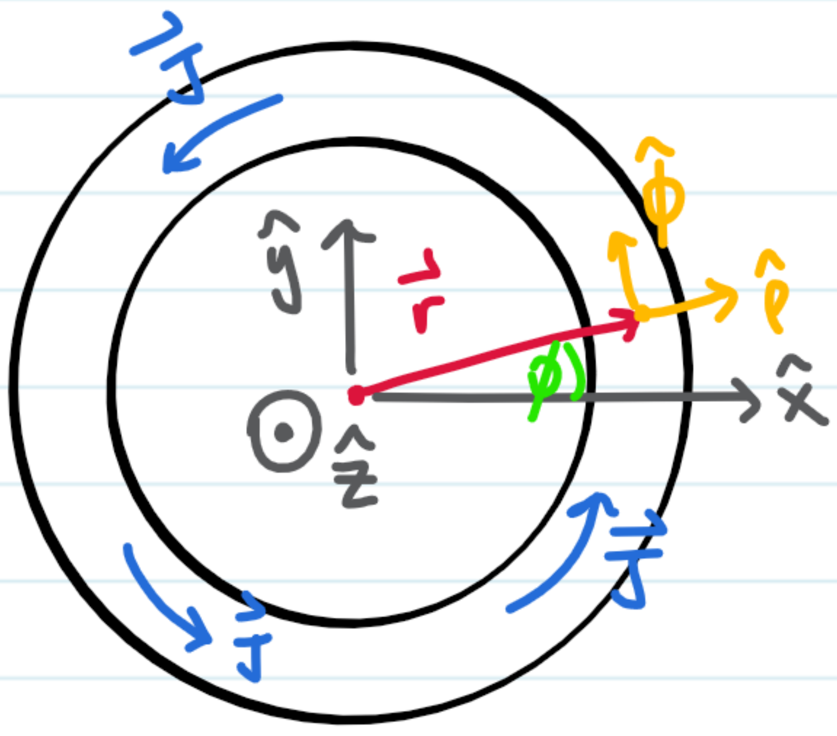


$$\vec{J}(a \leq \rho \leq b) = \frac{\alpha}{\rho}\hat{\phi} \tag{1}$$

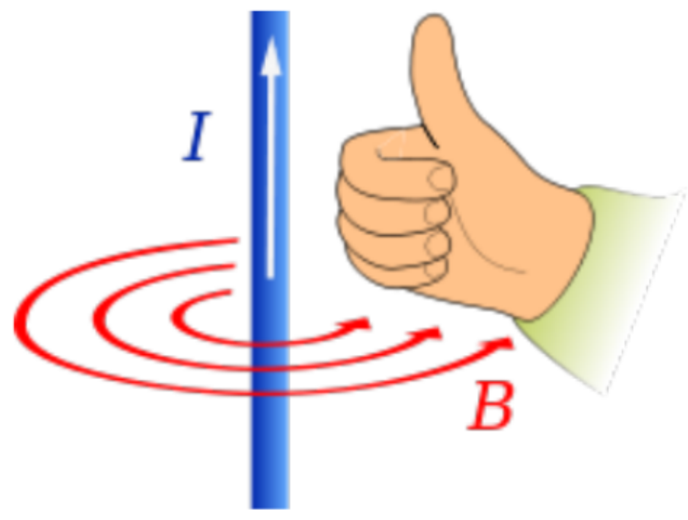
con α una constante conocida.

a) Obtenga el campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ en todas partes.

Para calcular $\vec{B}$, notemos que tiene cierta simetría:



→ Visto desde arriba, vemos que como la densidad de corriente apunta en $\hat{\phi}$ (en cilíndricas), por la regla de la mano derecha → vemos que el campo magnético debe apuntar en $\hat{z}$ necesariamente!



$$\Rightarrow \quad \vec{B} = B(\rho, \phi, z)\hat{z}$$

Por otro lado, como $\vec{J}$ no depende de ϕ, solo de ρ, entonces no hay razón para que $\vec{B}$ también dependa de ϕ! Eso, sumado a que el cilindro es infinito en $\hat{z}$, entonces $\vec{B}$ tampoco debería depender de z! Así, como $\vec{J}$ depende solo de ρ entonces:

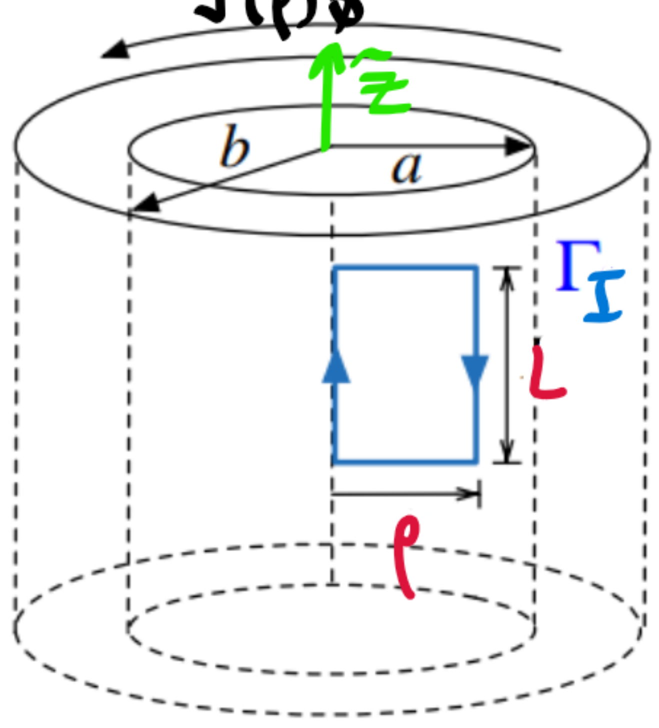
$$\vec{B} = B(\rho)\hat{z} \quad \longleftarrow \text{ solo por simetría!}$$

Luego, como determinamos la dep. y dirección de $\vec{B}$ podemos usar la Ley de Ampère:

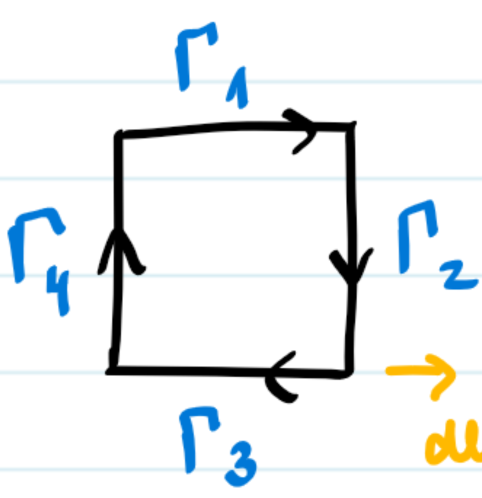
$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{enc}} \longrightarrow \text{ ojo, } \Gamma \text{ debe ser un loop cerrado!}$$

Hay que escoger un loop amperiano Γ que sea (o no) atravesado por $\vec{J}$. Como $\vec{B}$ depende de ρ, escogeremos un loop rectangular (ya verán por qué). Primero, notemos que hay 3 casos según el valor de ρ:

I) $\rho < a$: Escogemos un loop Γ_I de lados ρ y L, como se muestra en la figura.



- Luego, para usar Ampere describamos el $d\vec{l}$ que define este loop:



→ sentido del loop según regla de la mano derecha para que $I_{enc} > 0$.

→ Separamos Γ_I en sus 4 segmentos tq. el $d\vec{l}$ en c/u vale:

$$d\vec{l}_1 = d\rho\,\hat{\rho} \quad ; \quad d\vec{l}_2 = -dz\,\hat{z}$$
$$d\vec{l}_3 = -d\rho\,\hat{\rho} \quad ; \quad d\vec{l}_4 = dz\,\hat{z}$$

→ Luego, $\displaystyle\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}\right)\vec{B}\cdot d\vec{l}$ pero como $\vec{B} = B(\rho)\hat{z}$, por el producto punto, las integrales de Γ_1 y Γ_3 son cero!

Así, $$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_0^L B(\rho=\rho)\cdot(-dz)}_{\Gamma_2} + \underbrace{\int_0^L B(\rho=0)\,(dz)}_{\Gamma_4} = \left[-B(\rho) + B(0)\right]\cdot L \quad \dots (1)$$

→ Notar que B va evaluado en la posición de c/ trozo del loop Γ.

Nos falta calcular I_{enc} para reemplazar en Ampère. Como $\vec{J}$ solo es $\neq 0$ para $a<\rho<b$, nuestro loop Γ_I no encierra corriente! $\Rightarrow$ $I_{enc}=0$ y entonces en (1):

$$\left[-B(\rho)+B(0)\right]\cdot L \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{B(\rho)=B(0)},$$ $\rightarrow$ $\vec{B}$ es cte igual a $B(\rho=0)$ para $\rho<a$.

— o —

... bueno pero, ¿cuánto vale $B(\rho=0)$? $\rightarrow$ Black-Sabbath (Biot-Savart)

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dv'$$

y en este caso:

$$\begin{cases} \vec{r} = 0\hat{\rho}+z\hat{z} = 0 \quad (*) \\ \vec{r}\,' = \rho'\hat{\rho}+z'\hat{z} \\ \vec{J}(\vec{r}\,') = \frac{\alpha}{\rho'}\hat{\phi} \\ dv' = \rho' d\rho' d\phi' dz' \end{cases}$$

(*) Como por simetría $\vec{B}$ no puede depender de z, su valor debe ser igual para cualquier valor de z. En particular, podemos tomar $z=0$ sin pérdida de generalidad! Así la integral es + fácil.

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}=0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int \frac{\left(\frac{\alpha}{\rho}\hat{\phi}\right)\times\left(-\rho'\hat{\rho}-z'\hat{z}\right)\cdot\rho' d\rho' d\phi' dz'}{(\rho'^2+z'^2)^{3/2}}\right] \underset{\uparrow}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\left(\frac{\alpha}{\cancel{\rho'}}\hat{\phi}\right)\times\left(-\cancel{\rho'}\hat{\rho}\right)\rho' d\rho' dz' d\phi'}{(\rho'^2+z'^2)^{3/2}}$$

$\vec{B}$ solo puede apuntar en $\hat{z}$

polares $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$

$$= \frac{\alpha\mu_0}{\cancel{4\pi}_{2}}\cancel{(2\pi)}\int_{\rho'=a}^{b}\int_{z'=-\infty}^{\infty}\frac{(+\hat{z})\,\rho' d\rho' dz'}{(\rho'^2+z'^2)^{3/2}}$$

$\rightarrow$ integral en polares: $r=\sqrt{\rho'^2+z'^2}$
$\rho'=r\cos\theta$; $z'=r\sin\theta$; $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\rho'}{z'}\right)$
$\Rightarrow d\rho' dz' \rightarrow r\,dr\,d\theta$
↳ Jacobiano

$$= \frac{\alpha\mu_0}{2}\int_{r=\sqrt{a^2}}^{\sqrt{b^2}}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cancel{r}\cos\theta\cdot\cancel{r}\,dr\,d\theta}{r^{\cancel{3}}} = \frac{\alpha\mu_0}{2}\int_{\sqrt{a^2+\infty}}^{\sqrt{b^2+\infty}}\frac{dr}{r}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta$$

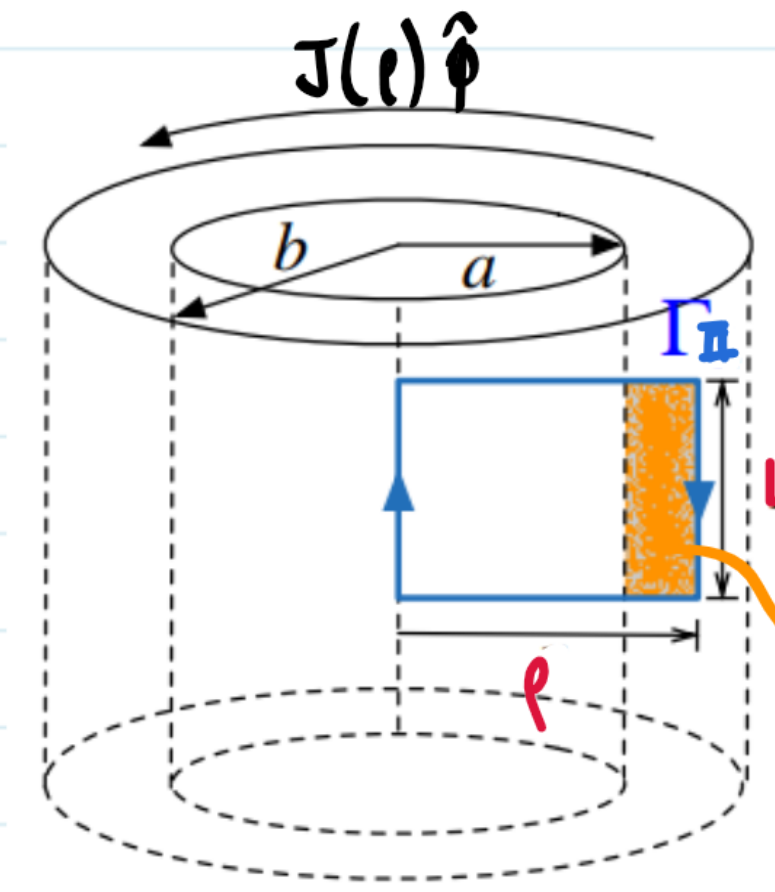
$$= \frac{\alpha\mu_0}{2}\left(\ln(r)\Big|_a^b\right)\cdot\underbrace{\left(\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)}_{2} = \frac{\mu_0\alpha}{\cancel{2}}\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\cancel{2} = \alpha\mu_0\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow B(0) = \alpha\mu_0\ln(b/a) \quad \dots (2)$$

— o —

Así entonces, $$\boxed{\vec{B}(\rho<a) = \alpha\mu_0\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{z}}$$ $\rightarrow$ Campo para $\rho<a$.

II) $a<\rho<b$: Repetimos el procedimiento anterior, solo que ahora $a<\rho<b$.



• Así, al igual que antes: $\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \left[B(0)-B(\rho)\right]\cdot L \quad \dots (3)$

... La diferencia es que ahora nuestro loop Γ_{II} sí encierra corriente! Como $\vec{J}$ no es cte, calculamos I como:

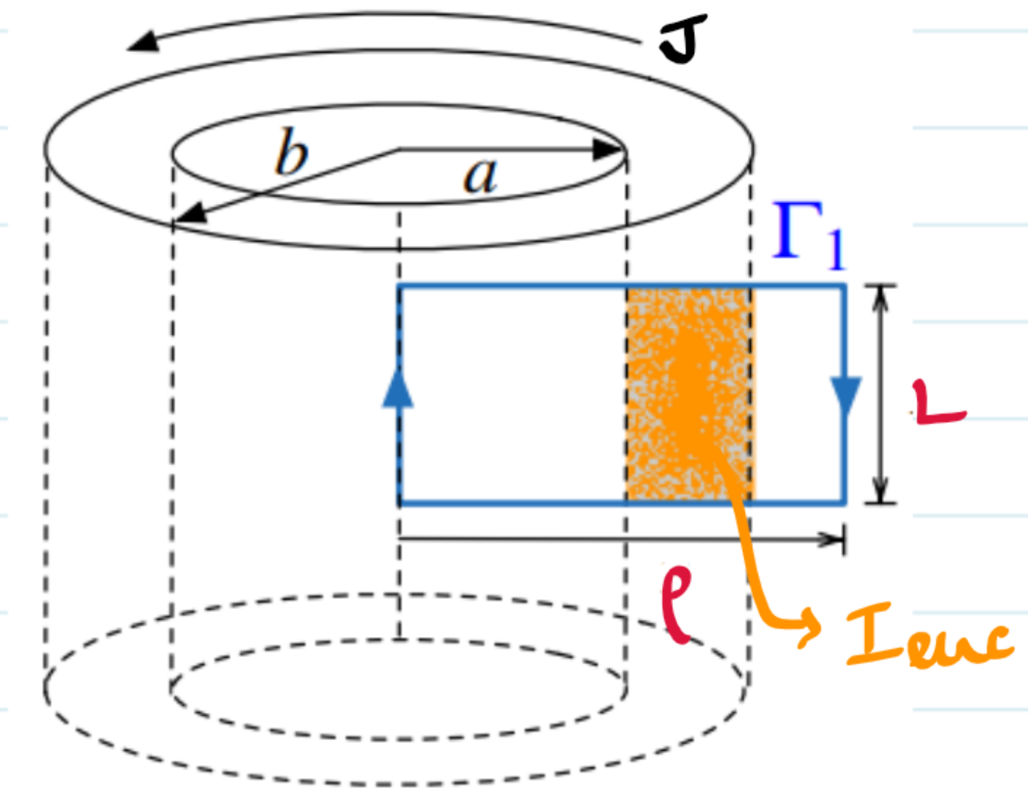
$$I_{enc} = \int\vec{J}\cdot d\vec{s} = \int_0^L\int_a^\rho\frac{\alpha}{\rho}\hat{\phi}\cdot(d\rho\,dz\,\hat{\phi}) = \alpha L\int_a^\rho\frac{d\rho}{\rho} = \alpha L\ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad \dots (4)$$

Reemplazando (3) y (4) en Ampère, y reemplazando el valor de $B(0)$ calculado antes obtenemos:

$$\left[-B(\rho)+\mu_0\alpha\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]\cancel{L} = \mu_0\cdot\alpha\cancel{L}\ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(a<\rho<b) = \mu_0\alpha\ln\left(\frac{b}{\rho}\right)\hat{z}} \rightarrow \text{Campo } \vec{B} \text{ para } a<\rho<b$$

III) $\rho > b$: Mismo procedimiento anterior, pero ahora el loop va hasta $\rho > b$.



Así, se obtiene que: $I_{enc} = \alpha L\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ y entonces:

$$\boxed{\vec{B}(\rho>b) = 0} \rightarrow \text{campo } \vec{B} \text{ nulo para } \rho>b.$$

Así finalmente, resumiendo:

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0\alpha\ln(b/a)\hat{z} & \text{si} \quad \rho<a \\ \mu_0\alpha\ln(b/\rho)\hat{z} & \text{si} \quad a<\rho<b \\ 0 & \text{si} \quad \rho>b \end{cases}$$

//

Obs: con esto terminamos la parte a), pero notemos que en verdad no era necesario calcular $B(0)$ con Biot-Savart (que fue una lata), si notamos que:

* Supongamos que no conocemos $B(0)$:
- Para nuestros 3 casos, las ecs. de la ley de Ampère que obtuvimos son:

I) $\rho<a$: $[B(0)-B(\rho<a)] = 0 \Rightarrow B(\rho<a) = B(0)$ ... (1)

II) $a<\rho<b$: $[B(0)-B(a<\rho<b)] = \mu_0\alpha\ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \Rightarrow B(a<\rho<b) = B(0)-\mu_0\alpha\ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$ .. (2)

III) $\rho>b$: $[B(0)-B(\rho>b)] = \mu_0\alpha\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow B(\rho>b) = \underbrace{B(0)-\mu_0\alpha\ln\left(\frac{b}{a}\right)}_{\text{cte}}$ .. (3)

Luego, como $B(\rho>b)$ es una cte y para $\rho=\infty$, $\vec{B}$ debería ser cero (estamos infinita/. lejos del cilindro), entonces por la ec. (3) necesariamente:

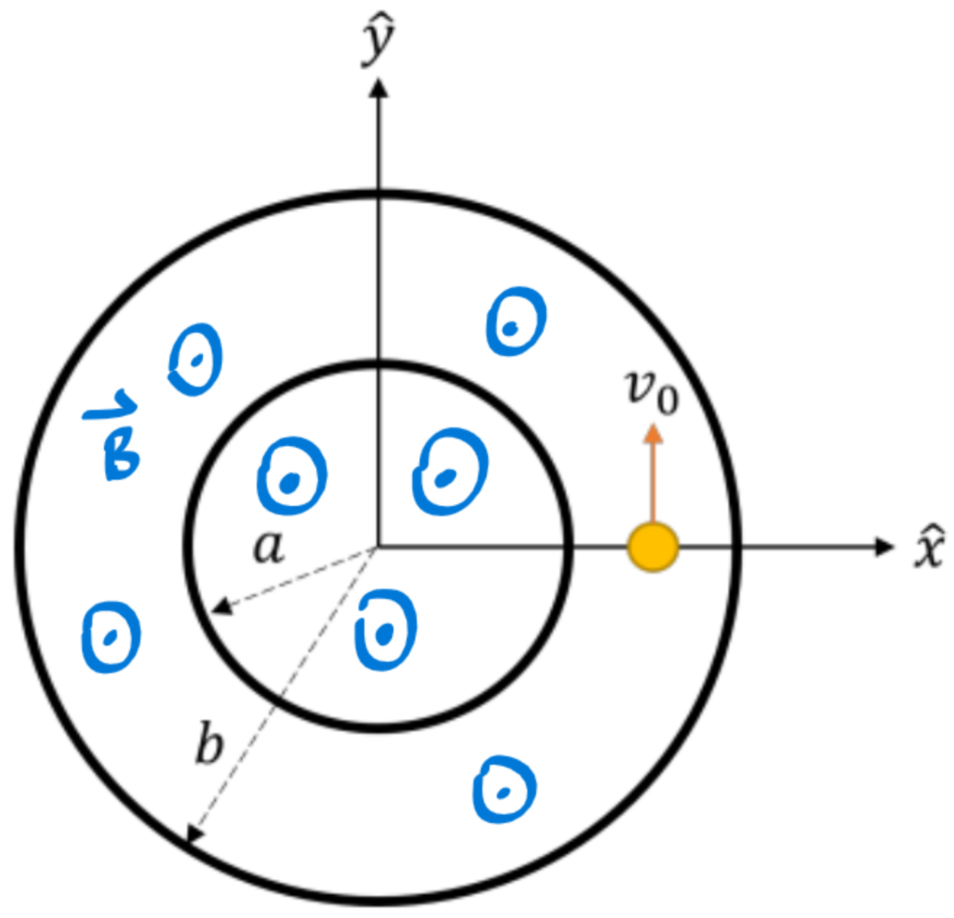
$$B(\rho\to\infty) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{y como} \quad \rho\to\infty>b \Rightarrow B(0)-\mu_0\alpha\ln(b/a) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow B(0) = \mu_0\alpha\ln(b/a)$$ //

... y con eso, tenemos $\vec{B}$ en todo el espacio, sin necesidad de calcular $B(0)$ explícita/. con Biot-Savart ☺

→ Este análisis es terrible útil!

Considere que en la posición $\vec{r} = \frac{(a+b)}{2}\hat{x}$ se coloca una partícula de carga q y masa m, con velocidad inicial $\vec{v} = v_0\hat{y}$ como se muestra en la figura.



b) Describa el movimiento de la partícula debido únicamente al campo magnético $\vec{B}$ y dibuje la trayectoria que seguirá (suponga que la partícula puede atravesar el cilindro conductor). ¿Qué pasaría si la velocidad inicial es cero?

Sabemos que la fuerza de Lorentz que siente la partícula está dada por:

$$\vec{F}_q = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

Luego, hacia a dónde se mueva dependerá de $\vec{E}$, $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Como solo nos preguntan por el movimiento de q debido solo a $\vec{B}$, nos concentraremos en el término:

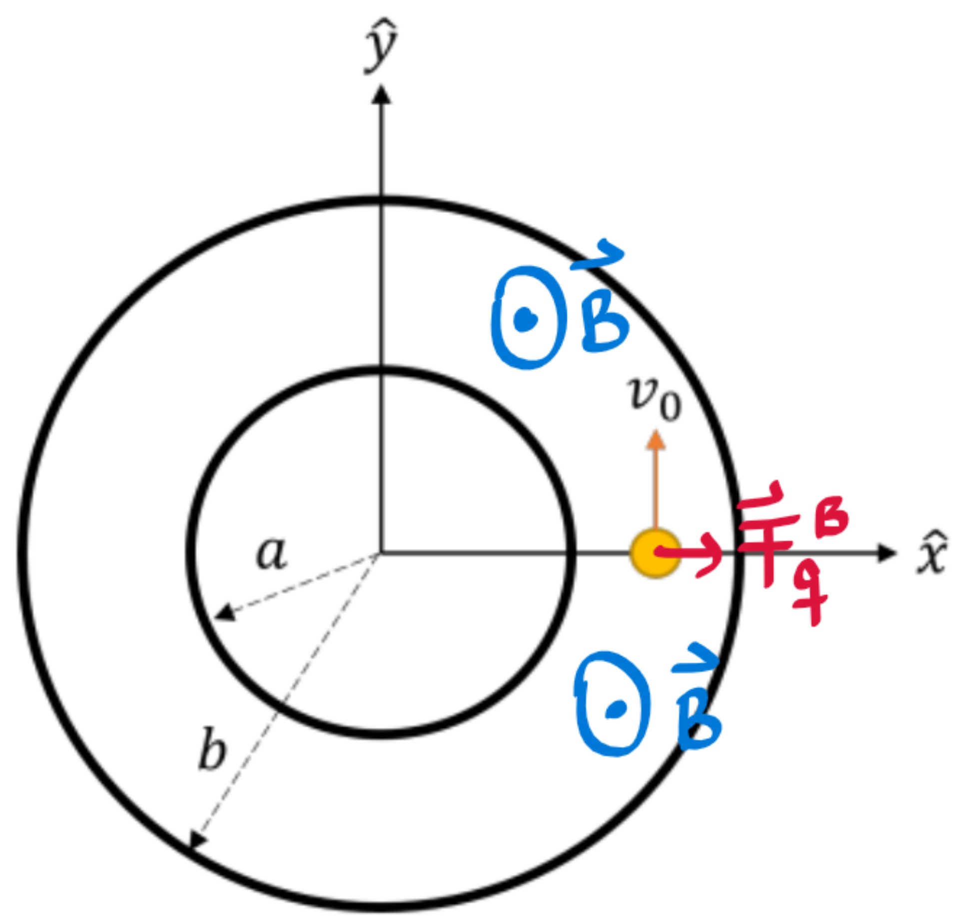
$$\vec{F}_q^B = q(\vec{v}\times\vec{B}) \quad \leftarrow \text{Fuerza "magnética"}$$

Así, inicialmente $\begin{cases} \vec{B}(t=0) = \vec{B}(\vec{r}_0) = \vec{B}\left(\rho = \left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = \mu_0\alpha\ln\left(\frac{2b}{a+b}\right)\hat{z} \\ \vec{v}(t=0) = v_0\hat{y} \end{cases}$

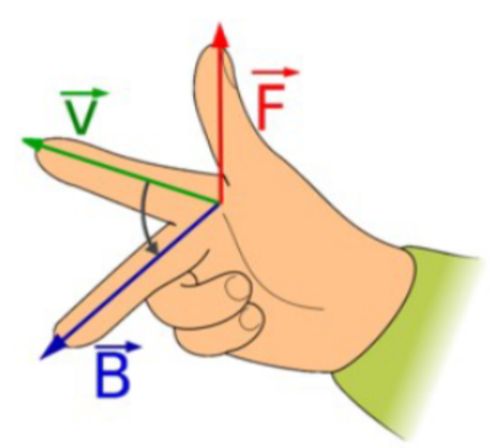
... y entonces: $\vec{F}_q^B(t=0) = q\left(v_0\hat{y}\times\mu_0\alpha\ln(2b/a+b)\hat{z}\right) = qv_0\mu_0\alpha\ln\left(\frac{2b}{a+b}\right)\underbrace{(\hat{y}\times\hat{z})}_{\hat{x}}$

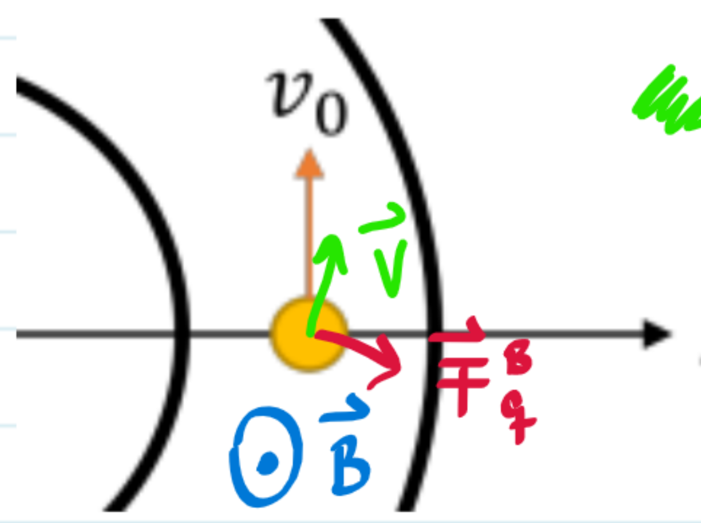
$$\Rightarrow \vec{F}_q^B(t=0) = \underbrace{qv_0\mu_0\alpha\ln\left(\frac{2b}{a+b}\right)}_{>0}\hat{x}$$

$\Rightarrow$ La partícula siente una fuerza en la dirección $\hat{x}$ en el instante inicial!



→ Cuando comience a moverse con $\vec{v} = v_0\hat{y}$, sentirá una fuerza (aceleración) en $\hat{x}$, y entonces su mov. inicial será tipo:





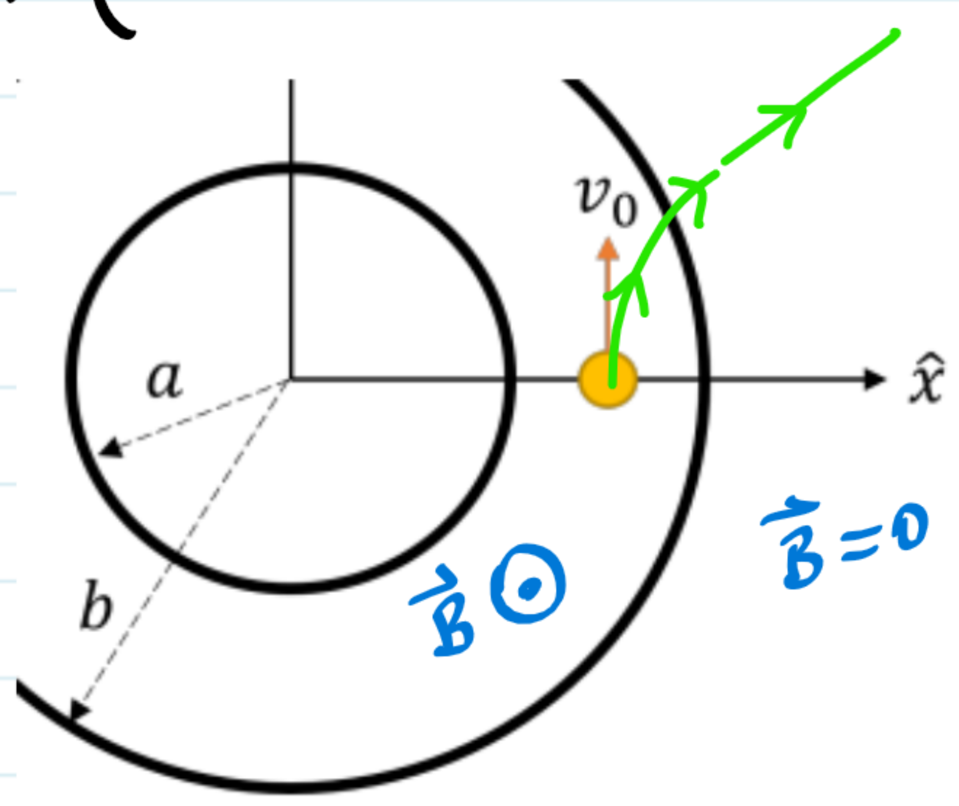
— : movimiento inicial

Como vemos, se alejará del centro del cilindro $\Rightarrow$ su posición en ρ aumentará.

– Si ρ aumenta, $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho \text{ mayor})$ y como $\vec{B} = \mu_0\alpha\ln\left(\frac{b}{\rho}\right) \Rightarrow \frac{b}{\rho}$ disminuye

$\Rightarrow \ln\left(\frac{b}{\rho}\right)$ disminuye también $\Rightarrow$ $\vec{B}$ es más débil si ρ aumenta.

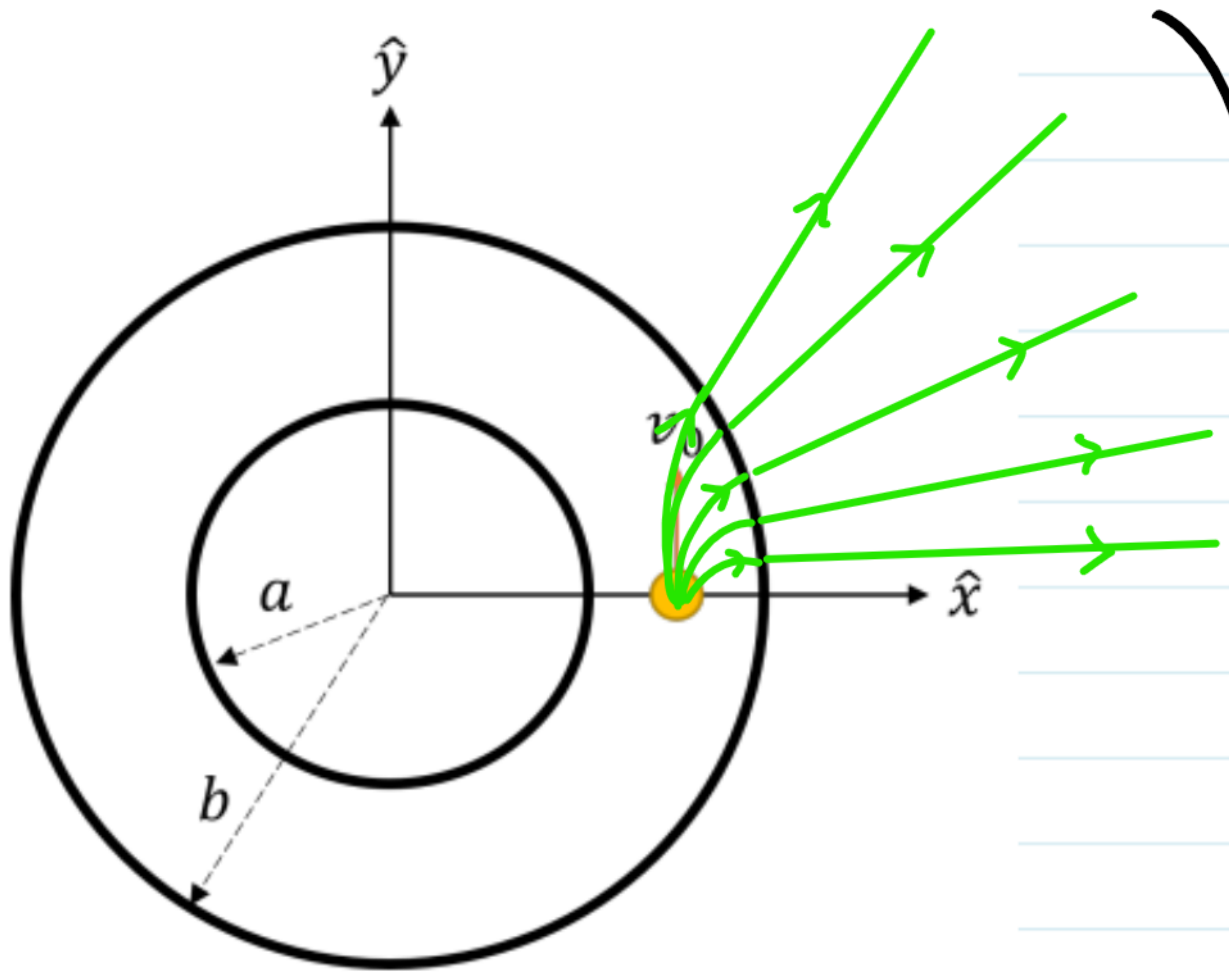
$\Rightarrow$ A medida que se aleje, sentirá un campo $\vec{B}$ más débil. Además, por la regla de la mano derecha, ahora $\vec{F}_q^B$ irá apuntando más hacia abajo, y entonces el mov. de q debido a $\vec{B}$ sería algo como:



* Notar que cuando salga del cilindro, $\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{F}_q^B = 0$ y la partícula se moverá en línea recta desde ahí.

Así, dependiendo de q y V_0, las posibles trayectorias serían como:

POSIBLES TRAYECTORIAS DEBIDO A $\vec{B}$



mayor V_0, mayor q

menor V_0, menor q

Por último, si $V_0 = 0$ $\rightarrow$ la carga q no sentiría $\vec{F}_q^B$ y entonces no se movería de su posición inicial debido a $\vec{B}$.

$\rightarrow$ ojo: no consideramos el efecto de $\vec{E}$ en el mov. de q, eso queda propuesto!