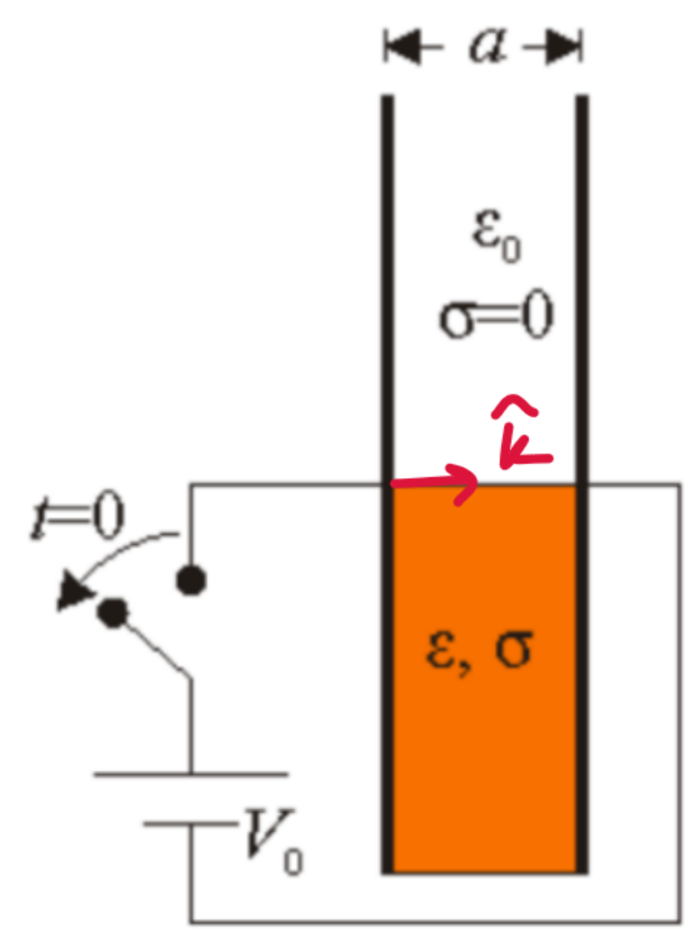
Pauta Aux 7:



P1. Un medio óhmico de permitividad ϵ, conductividad σ y sección $\frac{S}{2}$ rellena parcialmente el espacio entre dos placas planas y paralelas perfectamente conductoras, ambas de sección S y separadas por una distancia a. La otra mitad del espacio entre las placas queda vacío. Inicialmente el sistema se halla en estado estacionario, con una diferencia de potencial V_0 entre las placas.

a) Determine los campos $\vec{E}$, $\vec{J}$ y $\vec{D}$ en el sistema.

Como inicialmente el sistema está en estado estacionario, se tiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{J} = 0}$$

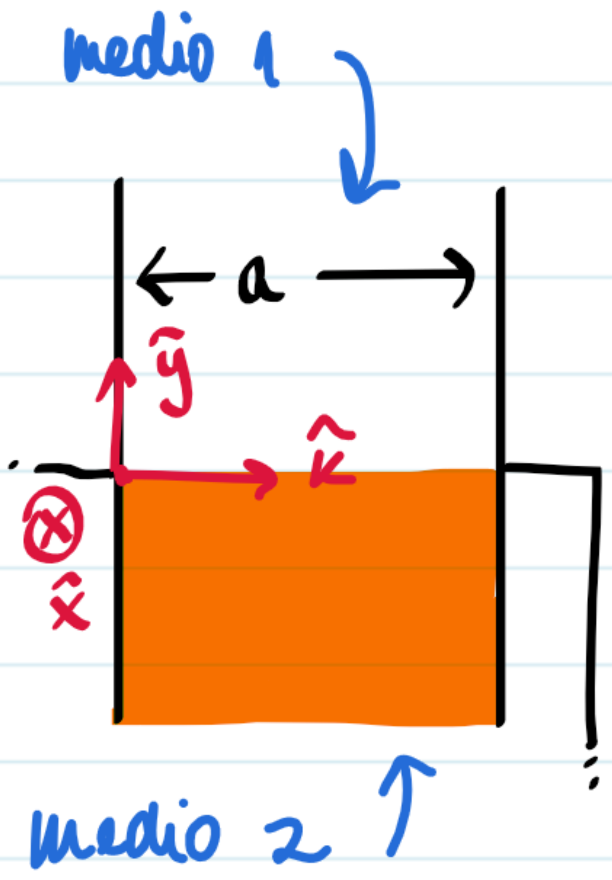
Podemos usar eso para intentar calcular $\vec{J}$ entre las placas, sin embargo, notemos que entre las placas hay 2 medios: el óhmico y el vacío

$\Rightarrow$ nos conviene primero analizar las condiciones de borde entre ellos.

En el borde entre los materiales:

$$J_1^{\perp} = J_2^{\perp} \ \ldots (1) \qquad E_2^{\parallel} = E_1^{\parallel} \ \ldots (2)$$

CONDICIONES DE BORDE!



← luego, tomando el eje $\hat{k}$ de coord. cartesianas como en el dibujo, notemos que la interfaz entre los medios está en $\hat{k}$ y entonces por las CB:

$$1) \ J_1^{xy} = J_2^{xy} \qquad 2) \ E_2^{k} = E_1^{k}$$

... y como por simetría (suponiendo las placas conductoras como infinitas) el campo $\vec{E}$ entre ellas solo puede ser de la forma:

$$\vec{E} = E(z)\hat{k} \ \ldots (*)$$

... entonces, recordando también que por la ley de ohm: $\vec{J} = g \cdot \vec{E} \overset{(*)}{\Rightarrow} \vec{J} = J(z)\hat{k}$

entonces solo nos sirve la CB (2) y entonces:

$$E_2^k = E_1^k \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 \equiv \vec{E}$$

→ El campo eléctrico es igual en ambos medios!

∴ Mejor intentemos calcular $\vec{E}$ antes que $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$.

- Como en el régimen estacionario $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ y $\vec{J} = g \cdot \vec{E} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{E} = 0}$

ojo! solo es cierto pues g es cte

Luego, como $\vec{E} = E(z)\hat{k}$, en cartesianas tenemos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial \cancel{E_x}^{\,0}}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{E_y}^{\,0}}{\partial y} + \frac{\partial E_k}{\partial z} = \frac{\partial E(z)}{\partial z} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{E(z) = C \cdot \hat{k}} \ \text{con C cte.}$$

Ahora que sabemos la forma de E, calculemos su valor usando el dato del potencial:
Como la dif. de potencial entre las placas es V_0:

$$\underbrace{V(z=a)}_{=0} - \underbrace{V(z=0)}_{V_0} = -V_0 = -\int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^a C\hat{k} \cdot dz\,\hat{k} = -C \cdot a \Rightarrow C = \frac{V_0}{a}$$

lado positivo en z=0

y entonces:

$$\boxed{\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E} = \frac{V_0}{a}\hat{k}}$$ → Campo eléctrico entre las placas.

Luego, usando $\vec{J} = g\vec{E}$ ($g = \sigma$, es distinta notación nomás) entonces tenemos:

$g_{vacío} = 0$ → $$\boxed{\vec{J}_1 = 0 \cdot \vec{E} = 0}$$; $$\boxed{\vec{J}_2 = g\vec{E} = \frac{gV_0}{a}\hat{k}}$$

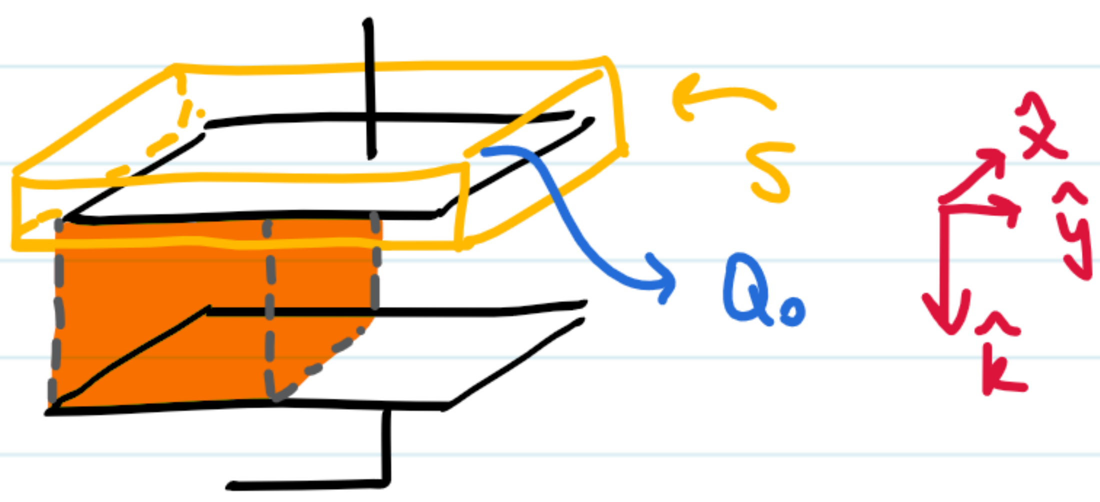
↳ medio 1 (vacío) ; ↳ medio 2 (material óhmico)

y finalmente, como $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, entonces:

$$\boxed{\vec{D}_1 = \epsilon_0\vec{E} = \frac{\epsilon_0 V_0}{a}\hat{k}} \quad ; \quad \boxed{\vec{D}_2 = \epsilon\vec{E} = \frac{\epsilon V_0}{a}\hat{k}}$$

En t = 0, se desconecta el generador, quedando el circuito abierto. ⟶ b) Obtenga la carga acumulada sobre una placa en estado inicial Q_0 y escriba una expresión para $Q(t)$ en función de $V(t)$.

Calculemos Q_0 (carga antes de $t=0$). Usando que $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q^{enc}_{libre}$, encerremos la placa de $z=0$ con una sup. gaussiana rectangular y entonces:



$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iint \vec{D}_1 \cdot dxdy\,\hat{k} + \iint \vec{D}_2 \cdot dxdy\,\hat{k}$$ ← ojo, hay hartos pasos en esta integral

$$= \frac{\epsilon_0 V_0}{a} \cdot \underbrace{\int_{S/2} dxdy}_{} + \frac{\epsilon V_0}{a} \cdot \int_{\frac{S}{2}} dxdy$$

c/ material sobre área S/2

$$= \frac{\epsilon_0 V_0}{a}\left(\frac{S}{2}\right) + \frac{\epsilon V_0}{a}\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{V_0 S}{2a}(\epsilon_0 + \epsilon) = Q^{enc}_{libre}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_0 = \frac{V_0 S}{2a}(\epsilon_0 + \epsilon)}$$ → carga acumulada sobre una placa conductora.

Para $t \geq 0$, la placa comenzará a descargarse así que el potencial ahí ya no será V_0, sino $V \to V(t)$, así que es razonable plantear que:

$$\boxed{Q(t) = V(t) \cdot \frac{S}{2a}(\epsilon_0 + \epsilon)}$$ → Q(t) en fn. de V(t)

c) Obtenga una expresión para $V(t)$.

Sabemos que $Q(t)$ depende de $V(t)$ y también que $I = \pm\, dQ/dt \Rightarrow$ si calculamos I, podemos derivar $Q(t)$ y obtener una EDO para $V(t)$, y así poder calcularlo.

Como conocemos $\vec{J}$, entonces $I = \int \vec{J}\cdot d\vec{s} = \iint_{S/2} \cancelto{0}{\vec{J}_1} \cdot d\vec{s} + \iint_{S/2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{s}$

$$\Rightarrow I \overset{V_0 \to V(t)}{=} \iint_{S/2} \frac{gV(t)}{a}\, ds = \frac{g\,V(t)\cdot S}{2a} \Rightarrow I(t) = V(t)\cdot\left[\frac{gS}{2a}\right]$$ ← ojo!

Del resultado anterior identificamos la ley de ohm: $V = I \cdot R$ y entonces:

$$I(t) = V(t) \cdot \underbrace{\left[\frac{gS}{2a}\right]}_{1/R} \quad \ldots (4) \quad \ldots \quad R = \frac{2a}{gS} \rightarrow \text{resistencia del circuito}$$

Teniendo (4), recordemos que $I(t) = \overset{\text{descarga}}{-}\frac{dQ}{dt}$ y entonces juntando lo de b):

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left[V(t) \cdot \frac{S}{2a}(\epsilon_0 + \epsilon)\right] = \frac{dV(t)}{dt} \cdot \left[\frac{\cancel{S}}{\cancel{2a}}(\epsilon_0+\epsilon)\right] \stackrel{!}{=} -I(t) = -V(t) \cdot \left[\frac{g\cancel{S}}{\cancel{2a}}\right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{dV(t)/dt = \frac{-g}{(\epsilon_0+\epsilon)} \cdot V(t)}_{\text{EDO}} \Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 \cdot e^{-(g/\epsilon_0+\epsilon) \cdot t}}$$

↳ Voltaje en fn del tiempo

d) Determine los campos $\vec{E}$, $\vec{J}$ y $\vec{D}$ considerando su evolución temporal, para $t > 0$.

Teniendo V(t), todo es directo de lo hecho anteriormente:

$$\vec{E}(t) = \frac{V(t)}{a}\hat{k} = \frac{V_0}{a} \cdot e^{-(g/\epsilon_0+\epsilon) \cdot t} \cdot \hat{k}$$

CAMPOS PARA $t > 0$

$$\vec{J}_1 = 0 \quad ; \quad \vec{J}_2(t) = g \cdot \vec{E}(t) = \frac{gV_0}{a} \cdot e^{-(g/\epsilon_0+\epsilon) \cdot t} \cdot \hat{k}$$

$$\vec{D}_1(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) = \frac{\epsilon_0 V_0}{a} \cdot e^{-(g/\epsilon_0+\epsilon) \cdot t} \cdot \hat{k} \quad ; \quad \vec{D}_2(t) = \frac{\epsilon \cdot V_0}{a} \cdot e^{-(g/\epsilon_0+\epsilon) \cdot t} \cdot \hat{k}$$

e) Obtenga la energía que se disipa en el proceso.

Por definición,

$$U_d = \int_0^\infty P_d \cdot dt \quad ; \quad P_d = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2 e^{-\left(\frac{2g}{\epsilon_0+\epsilon}\right) \cdot t}}{(2a/gS)}$$

U_d: energía disipada; P_d: potencia disipada

$$\Rightarrow U_d = \left(\frac{gS}{2a}\right) \cdot V_0^2 \int_0^\infty e^{-\left(\frac{2g}{\epsilon_0+\epsilon}\right) \cdot t} dt = \left(\frac{\cancel{g}SV_0^2}{2a}\right) \cdot (-1)\left(\frac{\epsilon_0+\epsilon}{2\cancel{g}}\right) e^{-(\ )t}\Big|_0^\infty$$

$$= 0 + \frac{SV_0^2}{4a}(\epsilon_0+\epsilon) \cdot \cancel{e^0}^{\,1} = \frac{SV_0^2}{4a} \cdot (\epsilon_0 + \epsilon)$$

↳ energía disipada desde que se desconecta el interruptor.