Pauta Aux. 2

P1] a) Sabemos que la carga total del cascarón es Q. Luego, al integrar la densidad de carga en todo el volumen, debe cumplirse que

$$\iiint_{\Omega} \rho \, dV \overset{!}{=} Q$$

donde Ω corresponde al volumen del cascarón, el cual se parametriza en esféricas según

$$\vec{r} = r\hat{r} \ ; \quad r \in [R_1, R_2] \ ; \quad \phi \in [0, 2\pi] \ ; \quad \theta \in [0, \pi]$$

Luego, el elemento de volumen en coordenadas esféricas está dado por

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Sustituyendo esto, junto a $\rho(r) = Ar$, se obtiene que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} Ar \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = Q$$

$$\Leftrightarrow \quad A \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)}_{(*)} \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right)}_{(**)} \underbrace{\left(\int_{R_1}^{R_2} r^3 \, dr\right)}_{(***)} = Q$$

$(*)$: $$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

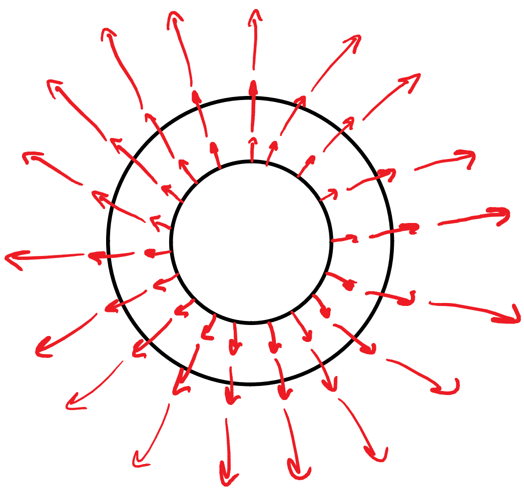
$(**)$: $$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = -\cos\theta \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

$(***)$: $$\int_{R_1}^{R_2} r^3 \, dr = \frac{r^4}{4}\Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{R_2^4 - R_1^4}{4}$$

Así, sustituyendo c/u de los resultados obtenidos

$$A \cdot \cancel{2}\pi \cdot \cancel{2} \cdot \frac{R_2^4 - R_1^4}{\cancel{4}} = Q \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A = \frac{Q}{\pi\left(R_2^4 - R_1^4\right)}}$$

b) Para calcular el campo eléctrico, notamos que existe simetría en la distribución de cargas del sistema, en particular, simetría esférica.

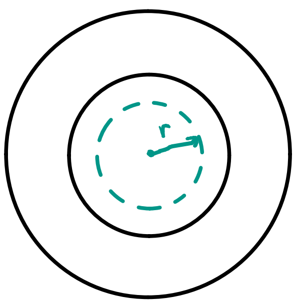


Así, se tiene que el campo tiene dirección radial, y este depende únicamente del radio (no tiene sentido que dependa de θ ni ϕ), por lo que

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

Luego, para calcular el campo eléctrico, debemos escoger una superficie cerrada que encierre la carga. Como el sistema se compone de 3 etapas (hueco vacío del casquete, dentro del casquete, fuera del casquete). Luego debemos estudiar el comportamiento de $\vec{E}$ en c/u de estos casos, que se pueden clasificar según el valor de r como sigue:

$r < R_1$



Escogemos una esfera de radio r, centrada en el centro del casquete, tal que $r < R_1$. Notamos que no hay carga encerrada por esta esfera (pues esta está en el casquete). Luego

$$Q_{enc} = 0$$

Por lo que, sustituyendo en la ley de Gauss

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

Luego, recordando que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$, y que en esféricas, $d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$ (para la orientación de esa superficie), se tiene que

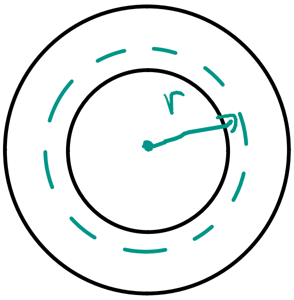
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\hat{r}\cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow E(r) r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = E(r) r^2 \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \right) \left(\underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow E(r) r^2 \cdot 4\pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E(r) = 0 \; , \quad \therefore \; \boxed{\vec{E}(r < R_1) = 0}$$

Nota: Pueden decir directamente que si $Q_{enc}=0 \Rightarrow \vec{E}=0$, yo hice la matemática únicamente por motivos pedagógicos.

$R_1 < r < R_2$



Análogo a lo hecho antes, escogemos una esfera de radio r tal que $R_1<r<R_2$. En este caso, una porción de la zona cargada es encerrada, por lo que $Q_{enc}\neq Q$, y debe ser calculada mediante un procedimiento análogo al hecho antes. La esfera que contiene la carga se parametriza según

$$\vec{r} = r\hat{r} \; ; \quad r\in[R_1, r], \quad \theta\in[0,\pi], \quad \phi\in[0,2\pi]$$

$$\Rightarrow Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{r} Ar\cdot r^2\sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= A\left(\cancelto{2\pi}{\int_0^{2\pi} d\phi}\right)\left(\cancelto{2}{\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}\right)\left(\cancelto{\frac{r^4-R_1^4}{4}}{\int_{R_1}^{r} r^3\, dr}\right)$$

$$= \frac{Q}{\cancel{\pi}(R_2^4-R_1^4)}\cdot \cancel{4\pi}\cdot\frac{r^4-R_1^4}{\cancel{4}}$$

$$\Leftrightarrow Q_{enc} = \frac{r^4-R_1^4}{R_2^4-R_1^4}Q$$

Luego, reemplazando en la ley de Gauss

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{r^4-R_1^4}{R_2^4-R_1^4}Q$$

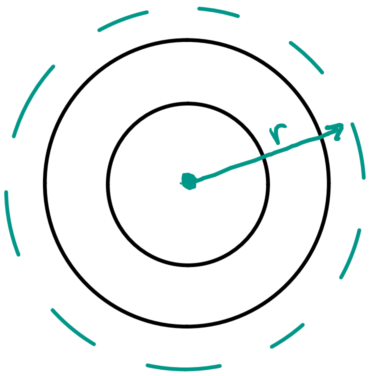
$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)\hat{r}\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,\hat{r} = \frac{r^4-R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\Big\downarrow$ desarrollo anterior

$$E(r)r^2\cdot 4\pi = \frac{r^4-R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(R_1<r<R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^4-R_1^4}{r^2(R_2^4-R_1^4)}\hat{r}}$$

$R_2 < r$ | Como se está encerrando la distribución de carga completa, en este caso, $Q_{enc} = Q$. Sustituyendo en la ley de Gauss



$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

desarrollo anterior

$$E(r)\, r^2 \cdot 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r > R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

Así, el campo en todas partes está dado por

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^4 - R_1^4}{r^2\left(R_2^4 - R_1^4\right)}\hat{r} & , \quad R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & , \quad r > R_2 \end{cases}$$

c) Para calcular el potencial, a diferencia del campo que se hace "de adentro hacia afuera", lo hacemos "de afuera hacia adentro". Así, primero calculamos el potencial para un punto arbitrario $\vec{r} = r\hat{r}$, tq' $r > R_2$. Así

$$V(r > R_2) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad / \vec{E}(r > R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\hat{r}\ ;\ d\vec{l} = dr\,\hat{r}$$

$$= -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot dr\,\hat{r}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

$$\Leftrightarrow V(r > R_2) = \cancel{+}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cancel{+}\frac{1}{r} + \cancel{\frac{1}{\infty}}^{\,0}\right] \Leftrightarrow \boxed{V(r > R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Luego, calculamos el potencial para un punto $\vec{r} = r\hat{r}$, pero ahora con $R_1 < r < R_2$ (dentro de la zona cargada). Así

$$V(R_1<r<R_2) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{-\int_{\infty}^{R_2} \vec{E}(r>R_2)\cdot dr\hat{r}}_{(1)} \underbrace{-\int_{R_2}^{r} \vec{E}(R_1<r<R_2)\cdot dr\hat{r}}_{(2)}$$

Separamos en 2 integrales, pues el campo eléctrico es una función por partes.

(1): $$-\int_{\infty}^{R_2} \vec{E}(r>R_2)\cdot dr\hat{r} = -\int_{\infty}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot dr\hat{r}$$

Corresponde a la integral usada para calcular $V(r>R_2)$, solo que con límite superior R_2 en lugar de r. Luego,

$$-\int_{\infty}^{R_2} \vec{E}(r>R_2)\cdot dr\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

(2): $$-\int_{R_2}^{r} \vec{E}(R_1<r<R_2)\cdot dr\hat{r} = -\int_{R_2}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r^4-R_1^4}{r^2(R_2^4-R_1^4)}\hat{r}\cdot dr\hat{r}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)} \int_{R_2}^{r} \frac{r^4-R_1^4}{r^2}\,dr$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\int_{R_2}^{r} r^2\,dr - R_1^4\int_{R_2}^{r}\frac{dr}{r^2}\right] = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_2}^{r} + R_1^4\left[\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{r}\right]$$

$$\Leftrightarrow -\int_{R_2}^{r} \vec{E}(R_1<r<R_2)\cdot dr\hat{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\frac{r^3-R_2^3}{3} + R_1^4\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

De esta manera, el potencial obtenido es

$$V(R_1<r<R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\frac{r^3-R_2^3}{3} + R_1^4\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(R_1<r<R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} + \frac{R_2^3-r^3}{3(R_2^4-R_1^4)} + \frac{R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{r}\right)\right]}$$

Finalmente, para obtener el potencial en $\vec{r} = r\hat{r}$ tq' $r < R_1$, se realiza un procedimiento análogo, separando la integral en 3 partes (las 3 que definen a $\vec{E}$).

$$V(r<R_1) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{-\int_{\infty}^{R_2} \vec{E}(r>R_2)\cdot dr\hat{r}}_{(3)} \underbrace{- \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}(R_1<r<R_2)\cdot dr\hat{r}}_{(4)} \underbrace{- \int_{R_1}^{r} \vec{E}(r<R_1)\cdot dr\hat{r}}_{(5)}$$

Notar que la integral (3) es idéntica a la integral (1) ya calculada. Además, la integral (4) es idéntica a la integral (2), solo que con límite superior R_1 en lugar de r. Así

$$-\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}(R_1<r<R_2)\cdot dr\hat{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\frac{R_1^3-R_2^3}{3} + R_1^4\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

Finalmente, dado que

$$\vec{E}(r<R_1) = 0 \Rightarrow -\int_{R_1}^{r} \vec{E}(r<R_1)\cdot dr\hat{r} = 0$$

De esta manera, sustituyendo (3) y (4), obtenemos que

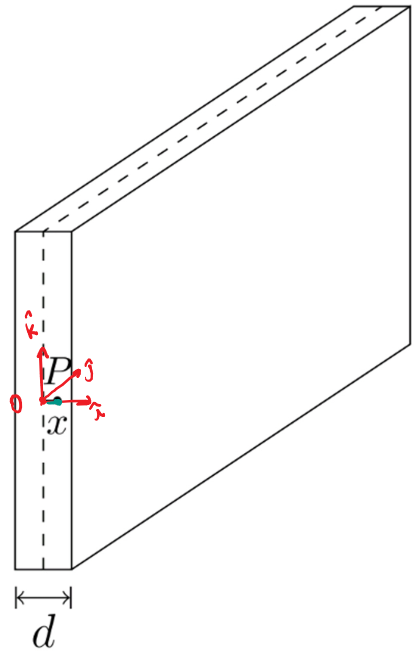
$$V(r<R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\frac{R_1^3-R_2^3}{3} + R_1^4\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(r<R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} + \frac{R_2^3-R_1^3}{3(R_2^4-R_1^4)} + \frac{R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right]}$$

Así, el potencial eléctrico en todo el espacio está dado por

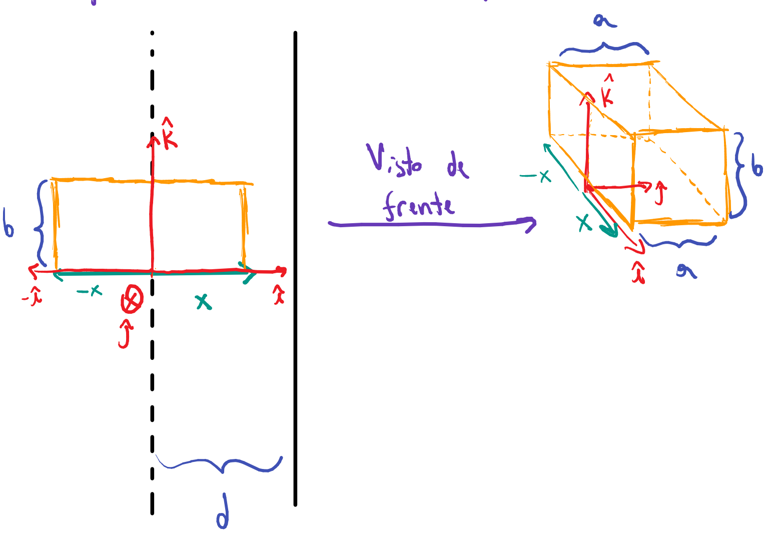
$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > R_2 \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{R_2^3-r^3}{3(R_2^4-R_1^4)} + \dfrac{R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{r}\right)\right], & R_1 < r < R_2 \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{R_2^3-R_1^3}{3(R_2^4-R_1^4)} + \dfrac{R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}\right)\right], & r < R_1 \end{cases}$$

P2) En el primer caso, dado que se trata de un plano muy extenso ($\approx \infty$), hay simetría, por lo que es posible emplear ley de Gauss. Utilizando coordenadas cartesianas, con el origen indicado en rojo, el punto P tiene posición



$$\vec{r} = x\hat{\imath}$$

Luego, para calcular el campo eléctrico en este punto, debemos definir una superficie cerrada. En este caso, usaremos un prisma rectangular de lados a, b arbitrarios, pero de altura 2x (de manera simétrica, según la figura), tal que dicho punto esté en una de las esquinas. Esto es tal que



Luego, la carga encerrada, al ser esta uniformemente distribuida, puede ser calculado simplemente como el producto entre la densidad de carga y el volumen del prisma, tal que

$$Q_{enc} = \rho \cdot 2abx$$

Por otra parte, la integral del campo eléctrico debe ser separada en c/u de las caras

$$\oint\!\!\!\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{\text{cara}\\\text{sup}}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{\substack{\text{cara}\\\text{inf}}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + 4 \iint_{\text{lados}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}$$

Analizando la integral de las caras, se tiene para c/u de estas que

$$\iint_{\text{lados}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = 0$$

Ya que $\vec{E}_1 = E_1(x)\hat{\imath}$, y $d\vec{S} = dx\,dy\,\hat{k}$ o $d\vec{S} = dx\,dz\,\hat{\jmath}$, dependiendo de la cara. En cualquiera de estos casos se tendrá que

$$E_1(x)\hat{\imath} \cdot dx\,dy\,\hat{k} = 0 \quad ; \quad E_1(x)\hat{\imath} \cdot dx\,dz\,\hat{\jmath} = 0$$

Nota: Esto es intuitivo, pues $\iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}$ significa el flujo de campo eléctrico a través de la superficie Σ. Como el campo es perpendicular a la orientación de estas superficies, no hay líneas de campo que atraviesen los lados.

Por otro lado, desarrollando la integral en la cara superior, al tratarse de un cuadrado de lados a y b, a una distancia x del origen, se parametriza como

$$\vec{r} = x\hat{\imath} \quad ; \quad y \in [0,a] \quad ; \quad z \in [0,b]$$

Como, por simetría, $\vec{E}_1 = E_1(x)\hat{\imath}$, sustituyendo en la integral (con $d\vec{S} = dy\,dz\,\hat{\imath}$ para esta superficie)

$$\iint_{\substack{\text{cara}\\ \text{sup}}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_0^a E_1(x)\hat{\imath} \cdot dy\,dz\,\hat{\imath} = E_1(x) \int_0^b \int_0^a dy\,dz = E_1(x)\,ab$$

Luego, la cara inferior, análogo a la cara superior, se parametriza como

$$\vec{r} = -x\hat{\imath} \quad ; \quad y \in [0,a] \quad ; \quad z \in [0,b]$$

En este caso, por simetría, la magnitud del campo en $-x$ es idéntica a la magnitud en x, i.e.

$$E_1(x) = E_1(-x)$$

Sin embargo, ya que la carga está uniformemente distribuida, la dirección es opuesta, tal que

$$\vec{E}_1(-x) = -\vec{E}_1(x) = -E_1(x)\hat{\imath}$$

Por otra parte, la orientación de la superficie para la cara inferior es opuesta a la de la cara superior, por lo que

$$d\vec{S} = -dy\,dz\,\hat{\imath}$$

Sustituyendo estos resultados en la integral de la cara inferior, obtenemos que

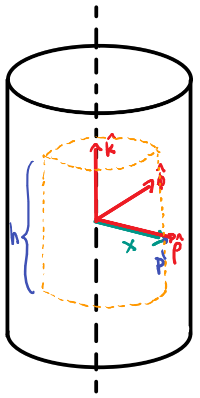
$$\iint_{\substack{\text{cara}\\ \text{inf}}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_0^a -E_1(x)\hat{\imath} \cdot -dy\,dz\,\hat{\imath} = E_1(x) \int_0^b \int_0^a dy\,dz = E_1(x)\,ab$$

Tal que, reemplazando los resultados obtenidos en la Ley de Gauss, obtenemos que

$$\underbrace{E_1(x)\cancel{ab} + E_1(x)\cancel{ab}}_{2E_1(x)} = \cancel{2}\frac{\rho \cancel{ab} x}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_1(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}}$$

Una vez enrollado el plano, se forma un cilindro muy extenso (nuevamente, $\approx \infty$), por lo que es posible aplicar la ley de Gauss. La metodología será muy similar a la empleada anteriormente. En este caso, empleando coordenadas cilíndricas el punto P' tiene posición

$$\vec{r} = x\hat{\rho}$$



Para calcular $\vec{E}$ mediante Gauss, usamos ahora como superficie cerrada un cilindro de radio x y altura h, tal que va desde $z=-h/2$ hasta $z=h/2$. La carga encerrada, nuevamente, se puede obtener como el producto entre la densidad y el volumen encerrado

$$Q_{enc} = \rho \cdot \pi x^2 h$$

Por otra parte, la integral de $\vec{E}$ se puede separar como

$$\oiint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \iint_{manto} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \iint_{tapa\ sup} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \iint_{tapa\ inf} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}$$

Como por simetría $\vec{E}_2 = E_2\hat{\rho}$, y $d\vec{S} = \pm \rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{k}$ en el caso de las tapas, se tiene que $\vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = 0$ en estos casos, por lo que

$$\iint_{tapa\ sup} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \iint_{tapa\ inf} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = 0$$

Por otra parte, el manto del cilindro de radio x se parametriza como

$$\vec{r} = x\hat{\rho} + z\hat{k} \quad ; \quad z \in [-h/2, h/2]; \ \phi \in [0, 2\pi]$$

Sustituyendo en la integral junto a $d\vec{S} = x\, d\phi\, dz\, \hat{\rho}$ (como estamos en cilíndricas, a una distancia x del eje, se tiene que $\rho = x$) y $\vec{E}_2 = E_2\hat{\rho}$, obtenemos que

$$\iint_{manto} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi} E_2 \hat{\rho} \cdot x\, d\phi\, dz\, \hat{\rho} = E_2 x \int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi} d\phi\, dz = E_2 x \cdot 2\pi h$$

Sustituyendo en la ley de Gauss, obtenemos que

$$\Rightarrow \quad E_2 \cancel{x} \cdot 2\cancel{\pi}\cancel{h} = \frac{\rho \cdot \cancel{\pi} x^{\cancel{2}} \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad E_2 = \frac{\rho x}{2\varepsilon_0}$$

Así, E_1/E_2 está dado por

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\cancel{\rho x}}{\cancel{\varepsilon_0}}}{\frac{\cancel{\rho x}}{2\cancel{\varepsilon_0}}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{E_1}{E_2} = 2}$$