FI2002-4 Electromagnetismo
Profesor: Walter Max-Moerbeck
Auxiliares: Benjamín Navarrete – Vicente Woovlett – Valeria Angulo

Parametrizaciones y superposición

"*Para que quede claro de una vez por todas*"

Ya sabemos que cuando hay simetrías, podemos explotarlas con las ecuaciones de Maxwell (Ley de Gauss y Ampere) para calcular los campos eléctricos y magnéticos, pero cuando no hay simetrías evidentes, tenemos que recurrir al cálculo directo, en la mayoría de los casos largo y tedioso. No es tan terrible eso sí, porque el principio de superposición viene a salvar el mundo y evitar que calculemos 15 veces algo que ya conocemos, como experimentaron en la P3 del C2 y en el ejercicio 4; podemos calcular el campo como suma (o integral) de contribuciones de campos que conocemos. Además, como la suma distribuye, conmuta, etc., podemos aplicarlo sucesivas veces, por ejemplo podemos calcular el campo eléctrico de un disco con carga (o el magnético de uno girando), y después calcular el de una esfera sumando discos con distintos radios, o el de cualquier cuerpo que sea posible de construir a partir de discos (varios de los sólidos en revolución creados por las cónicas, incluyendo por ejemplo hipérbolas 3D, caen dentro de ésta categoría), para finalmente calcular, sumando en vez de integrando, el campo de 5, 10+1, 42 e incluso 10^{420} de estos cuerpos distribuidos en el espacio (un poco overkill xd), aunque esto se vuelve lento de computar incluso en un computador...

Cada vez que nos enfrentamos a una integral, ya sea en 1D (largo), 2D (área), 3D (Volumen), integrales de línea, lo que sea, debemos darnos cuenta de qué estamos integrando. A modo de ejemplo, el trabajo que ejerce una fuerza a lo largo de un camino está dado por la integral de línea a través de un camino o curva Γ:

$$W_{\vec{a}\to\vec{b}}\left(\Gamma\right) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \tag{1}$$

Esto nos entrega la energía que le entrega o quita la fuerza $\vec{F}$ a una partícula a lo largo de la trayectoria Γ. Notar que aquí las variables de integración se suelen dejar sin la "prima" porque usualmente este trabajo es un número y no una función. Si queremos traer una carga con la mano desde el infinito hasta un punto $\vec{b}$ en contra del campo eléctrico de una distribución de carga en el origen, a velocidad constante, entonces esta partícula debe sentir fuerza nula en todo el camino para mantener su velocidad, o sea $\vec{F}_{mano}(\vec{r}) + q\vec{E}(\vec{r}) = 0 \implies \vec{F}_{mano}(\vec{r}) = -q\vec{E}(\vec{r})$, de manera que el trabajo que debemos ejercer con la mano, o sea la energía que le entregamos a la partícula y perdemos nosotros, es, con $\vec{\infty}$ (un abuso de notación) haciendo referencia a traerla desde un radio infinito pero sigue siendo un punto en $\mathbb{R}^3$:

$$W^{mano}_{\vec{\infty}\to\vec{b}}(\Gamma) = \int_{\vec{\infty}}^{\vec{b}} \vec{F}_{mano}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -q\int_{\vec{\infty}}^{\vec{b}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \implies V(\vec{b}) \equiv \frac{W^{mano}_{\vec{\infty}\to\vec{b}}(\Gamma)}{q} = -\int_{\vec{\infty}}^{\vec{b}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \tag{2}$$

Notar que el potencial electrostático es nada más ni nada menos que el trabajo por unidad de carga. Hemos encontrado la expresión para el potencial **evaluado** en $\vec{b}$ (o sea es un número

fijo), sin embargo esto es válido para cualquier $\vec{b}$, por lo que cambiamos en la integral la variable $\vec{r} \to \vec{r'}$ ya que es muda y es la variable que **parametriza la curva** Γ, **ojo que con esto ahora el** $d\vec{l}$ **pasa a ser** $d\vec{l'}$ o sea $r \to r'$, $\theta \to \theta'$ y $\phi \to \phi'$, y nos damos cuenta que esta es la expresión para el potencial como "función" de $\vec{b}$, por lo que cambiamos $\vec{b} \to \vec{r}$ obteniendo la expresión típica del potencial, pero con la rigurosidad de que el integrando y diferencial llevan una etiqueta "prima" indicando que es variable muda que parametriza la curva Γ, y la única dependencia del argumento $\vec{r}$ está en el límite superior de la integral:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{\infty}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r'}) \cdot d\vec{l'} \tag{3}$$

Aquí queda más que claro que $\vec{r} \neq \vec{r'}$. Si $\vec{r}$, el vector que define el punto donde estoy preguntando cuanto vale el campo eléctrico o el potencial, llegase a aparecer dentro de alguna integral (no la de la ec. 3, ahí no pasará nunca) como parte del integrando (hay muchísimos casos en que pasa esto) ¡¡¡es un vector constante para los efectos de la integración!!!

El potencial de una carga puntual q en el origen es más que conocido, y su campo eléctrico también, es de hecho la Ley de Coulomb. Si movemos la carga q del origen, lo único que cambia es que la distancia r ahora ya no es la distancia del punto en el espacio (donde pregunto cuánto vale el potencial o el campo) hacia el origen, sino que se debe reemplazar adecuadamente por la distancia entre este punto y la carga:

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{q(\vec{r} - \vec{r_q})}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r_q}||^3} \tag{4}$$

donde $\vec{r_q}$ es la posición de la carga desplazada del origen y el vector del numerador junto con una de las 3 potencias del módulo del denominador **arman un vector unitario que va en la dirección y sentido carga-**$(\vec{r})$. Notar que si $\vec{r_q} = 0$, o sea ponemos de nuevo la carga en el origen, se recupera la expresión más típica. Si ahora tenemos múltiples, por ejemplo N, cargas $\{q_i\}_{i=1,...,N}$ en posiciones $\{\vec{r_i}\}_{i=1,...,N}$ (**no confundirse, los** $\vec{r_i}$ **no son variables, son las posicións de las cargas c/r al origen**), el principio de **superposición** nos permite **sumar todas las contribuciones para encontrar el campo eléctrico neto, siempre y cuando los campos estén descritos desde el mismo origen**. Como decidí escribir el campo de la forma que se muestra en la ecuación 4, las contribuciones de cada carga ya están con respecto al mismo origen:

$$\vec{E}_{neto}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_{q_i}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r_i})}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r_i}||^3} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r_i})}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r_i}||^3} \tag{5}$$

El potencial también cumple el principio de superposición, es consecuencia directa de la linealidad de las derivadas e integrales:

$$V_{neto}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_{q_i}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r_i}||};\ \vec{E}_{neto}(\vec{r}) = -\nabla V_{neto}(\vec{r}) \tag{6}$$

Notar que si V_{neto} es una suma, el gradiente distribuye y por tanto $\vec{E}_{neto}$ es también la suma de "menos" los gradientes de los potenciales de cada carga. Esto es para cargas (o masas, sirve para todo) discretas. Si tenemos una distribución continua de cargas diferenciales $dq(\vec{r'})$ ubicadas en una

variable de posición $\vec{r'}$ que parametriza toda la curva, superficie o todo el volumen dependiendo de la naturaleza del problema a resolver, la sumatoria se convierte en algo que se puede pensar como una integral de Riemmann luego de las identificaciones $\vec{r_i} \to \vec{r'}$; $q_i \to dq'(\vec{r'})$ (notar que el diferencial en sí es función del espacio a través de una densidad) y $\sum_{i=1}^{N} \to \int_{\Omega,\Sigma,\Gamma}$ donde Ω, Σ y Γ corresponden a una región que alberga **toda la carga** y describe volumen, superficie o línea (curva) respectivamente, dependiendo nuevamente de cómo es la situación, i.e. si es densidad de carga volumétrica, superficial, o lineal respectivamente. Con esto:

$$\vec{E}_{neto}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Omega,\Sigma,\Gamma}\frac{dq'(\vec{r'})(\vec{r}-\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||^3}, \textit{usualmente escrito como } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Omega}\frac{\rho(\vec{r'})(\vec{r}-\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||^3}dV'(\vec{r'}) \tag{7}$$

$$V_{neto}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Omega,\Sigma,\Gamma}\frac{dq'(\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||}, \textit{usualmente escrito como } \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Omega}\frac{\rho(\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||}dV'(\vec{r'}) \tag{8}$$

donde ustedes se darán cuenta que el diferencial de volumen depende de $\vec{r'}$ de forma usual, por ejemplo en esféricas $dV'(\vec{r'}) = r'^2 sin(\theta')dr'd\theta'd\phi'$. Aquí es donde a veces no tener la etiqueta "prima" juega en contra: algunos de ustedes dirían, como en el control 1, que como en un $\vec{r}$ fuera de las placas no hay densidad de carga el campo eléctrico es 0, **pero esto no es necesariamente cierto**, pues la densidad de carga no se está evaluando en $\vec{r}$, sinó que en $\vec{r'}$ y está siendo multiplicada por el factor $(\vec{r}-\vec{r'})/||\vec{r}-\vec{r'}||^3$ y "sumada" en la integral. Los límites de la integral se deben inferir acorde a lo que se quiere. **Quédense con que el principio de superposición del campo eléctrico se basa en sumar contribuciones del elemento más básico: la carga puntual, y por construcción esto permite superponer campos de configuraciones de carga más complejas.**

Si ahora miramos los campos magnéticos, el elemento más básico son los trozos de cable con corriente (si, lo sé, no suena tan espectacular como decir "carga" simplemente), particularmente las espiras cerradas y ojalá circulares (**anillos**) son de gran utilidad. Análogamente, uno puede pensar en una sección diferencial de área $d\vec{S'}(\vec{r'})$, y que en vez de densidad de carga, a ésta superficie la atraviesa una "densidad de corriente" $\vec{J}(\vec{r'})$ con cierto ángulo. Con esto, la corriente que pasa a través de una superficie Σ es la suma de la corriente que pasa a través de todos los trozos diferenciales, tomando en cuenta el producto punto pues si la densidad de corriente es paralela a la superficie (perpendicular a su vector normal), no cruza corriente:

$$I = \int_{\Sigma}\vec{J}(\vec{r'})\cdot d\vec{S'}(\vec{r'}) \tag{9}$$

Para encontrar el campo magnético de cualquier distribución de corrientes pueden utilizar Biot-Savart (la versión con $\vec{J}$, la que es con un $d\vec{l}$ es un caso particular de alambre unidimensional), que es una de las superposiciones más matraqueras porque cuenta **todos** los pedacitos de cable diferenciales habidos y por haber. Más simple es utilizar un resultado conocido, o que ya calcularon alguna vez. Por ejemplo, si bien el campo magnético de una espira circular unidimensional de radio R es tediosa de calcular, hemos resuelto parte de este problema, utilizando el tedioso Biot-Savart

al sumar contribuciones de pedacitos de cable con corriente I, preguntándonos únicamente cuánto vale el campo magnético en un punto z de su eje de simetría, imponiendo que el vector posición donde computamos el campo sea únicamente $\vec{r} \equiv z\hat{z}$ y encontramos que vale:

$$\vec{B}(z\hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{z} \tag{10}$$

Este resultado, lo utilizaron en el control para calcular cuánto vale el campo magnético de un disco en $z = 0$, lo cual es nuevamente otra simplificación. En el ejercicio 4 por otro lado, debían mantener un z. La gracia del principio de superposición, es que en vez de contar el disco entero y aplicarle a él Biot-Savart, es que pueden pensar en la ecuación 10 como un pedazo diferencial de campo, donde ahora en vez de usar un pedazo de cable como el "elemento más básico", están usando el anillo, cuyo campo conocen. La única diferencia es que ahora debemos reemplazar el radio correspondiente $R \to r'$ y sumar (**integrar realmente**) las contribuciones de todos los anillos de radio r', desde el que tiene radio $r' = 0$ hasta el anillo con radio $r' = R$ donde, espero que ya haya quedado más que claro, me adelanté poniéndole r' inmediatamente ya que será una variable **muda** que será integrada. Como esto es ahora un diferencial de campo magnético, debemos tener algo diferencial al otro lado; lo inmediato es decir que es la corriente. Esto se logra dándole un ancho dr' al anillo (haciéndolo un objeto 2D en vez de un anillo unidimensional, pero eso no es problema ya que el ancho será infinitesimal), y calculando cuánta carga cruza una sección transversal de largo dr' del mismo en un tiempo dt (en este caso es una línea, no un área, ya que el anillo y el disco son planos), procedimiento que expliqué en la auxiliar 10+1 cuando hicimos un análisis del control 2. Con esto y con un par de cambios de variable, se pudo obtener el campo magnético de un disco plano en un punto $z\hat{z}$ arbitrario en su eje de simetría.

Denuevo, como el principio de superposición habla de sumas, y las sumas cumplen las buenas propiedades, podemos ahora calcular el campo magnético de un cilindro en un punto arbitrario $z\hat{z}$ de su eje de simetría (ojo, no un cascarón cilíndrico, ese lo resolvió Benjamín en otro auxiliar utilizando el mismo procedimiento), ya sea que esté en rotación o que posea una densidad de corriente definida, sumando las contribuciones de todos los discos que ahora tendrán un espesor infinitesimal dz', habrá que reemplazar en el resultado del campo del disco la variable $z^2 \to (z-z')^2$ ya que ahora z' es la "altura cero" según el disco en altura z' y tendrían que encontrar el nuevo diferencial de corriente, el cual ahora se hace viendo cuánta carga atraviesa una superficie de altura dz' y ancho R en un tiempo dt. Luego si quieren pueden meter 15 cilindros superpuestos con distintas densidades de corriente o velocidades angulares y usar de nuevo superposición, pero no tendrá expresión analítica muy bonita, se los aseguro.

Espero que les haya quedado claro, esto va como material complementario a falta de la resolución de problemas en la auxiliar 10+1.

¡Saludines y buen receso!