

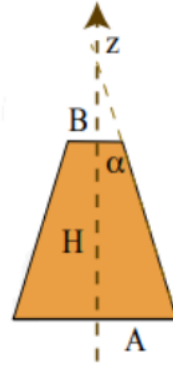
FI2002-2 Electromagnetismo.**Profesor:** Marcel Clerc.**Auxiliares:** Roberto Gajardo, David Pinto.

Desarrollo Ejercicio 3.

31 de Agosto del 2022

P1. Cono de tránsito cargado:

- a) Queremos calcular el potencial eléctrico en una posición arbitraria del eje de simetría de un cono macizo truncado, cuyo ángulo de apertura¹ es α , y cuya densidad de carga volumétrica es uniforme, es decir, $\rho(\vec{r}') = \rho_0$, con $\rho_0 > 0$. Las dimensiones del cono macizo se muestran en la siguiente figura:



En el caso de una distribución continua de cargas, el potencial eléctrico V en un punto $\vec{r}$ del espacio se calcula a través de una integral:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

En esta expresión, $\vec{r}'$ es un punto arbitrario de la distribución de cargas, y $dq(\vec{r}')$ es la intensidad de la carga infinitesimal ubicada en el punto $\vec{r}'$. Esta carga infinitesimal puede expresarse haciendo uso de la densidad de carga $\rho(\vec{r}')$ y un volumen infinitesimal dv del cono a través de la expresión $dq = \rho(\vec{r}')dv$, y entonces:

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \quad (1)$$

Ya que existe simetría axial, y el corte transversal es una circunferencia, es conveniente modelar el sistema haciendo uso de coordenadas cilíndricas con base ortonormal $\{\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}\}$, y con origen en el centro de la base del cono. Tomando en cuenta esto, ya que queremos el potencial eléctrico en un punto arbitrario del eje de simetría del disco, escribimos $\vec{r} = z\hat{z}$, donde $z \in (-\infty, \infty)$ es la distancia sobre este eje medida desde el centro del disco, tal como se muestra en la Figura 1. Por otro lado, recordemos que $\vec{r}'$ hace referencia a un punto arbitrario de nuestra distribución de carga, entonces usando coordenadas cilíndricas podemos escribir este vector como $\vec{r}' = r\hat{r} + h\hat{z}$, donde r es la distancia radial medida desde el eje de simetría del cono. Por último, como estamos usando coordenadas cilíndricas, el diferencial de volumen a utilizar es $dv = r d\phi dr dh$, donde ϕ es el ángulo azimutal de coordenadas cilíndricas. Ahora, es importante entender que los límites de integración que usemos deben ser consistentes con los límites físicos de nuestra distribución de carga, y como en

¹Corresponde al ángulo entre el eje de simetría y una recta paralela a la superficie del cono.

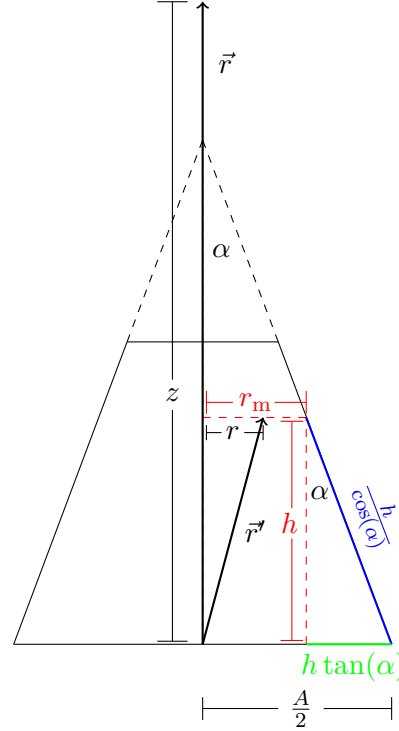


Figura 1: Distancias importantes del sistema.

este caso tenemos un cono², debemos notar que el límite superior de integración de la variable radial r (al cual llamaremos r_m) es diferente para distintos valores de la altura h , tal como se puede apreciar en la Figura 1. Esto es importante en dos sentidos, ya que primero eso nos dice que r_m depende de h , es decir:

$$h \in [0, H] \quad ; \quad r \in [0, r_m(h)] \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

Lo otro importante a tomar en cuenta es que esta relación nos obliga a integrar primero con respecto a la variable r , y luego con respecto a la variable h (es decir, las integrales no son independientes, y por lo tanto debemos tener cuidado con el orden en que las desarrollamos). Ahora, para integrar es necesario encontrar la dependencia explícita de r_m sobre la variable h , para lo cual nos apoyamos en las distancias destacadas en la Figura 1. Notando que el ángulo α se repite entre la recta de la altura h y la recta azul, y usando relaciones trigonométricas, podemos escribir $r_m = \frac{A}{2} - h \tan(\alpha)$, y entonces:

$$h \in [0, H] \quad ; \quad r \in \left[0, \frac{A}{2} - h \tan(\alpha)\right] \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

Entonces, desarrollamos la integral (1) con todo lo discutido hasta ahora:

$$\Rightarrow V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^H \int_0^{\frac{A}{2} - h \tan(\alpha)} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0}{|z\hat{z} - r\hat{r} - h\hat{z}|} r d\phi dr dh$$

²Al recorrer el cono completo, debemos integrar una circunferencia completa, eso explica los límites de la variable ϕ .

Dado que $\hat{r}$ y $\hat{z}$ son vectores unitarios de una misma base ortonormal, el módulo del denominador se puede calcular directamente con las componentes de esas direcciones, entonces:

$$|z\hat{z} - r\hat{r} - h\hat{z}| = |(z-h)\hat{z} - r\hat{r}| = \sqrt{(-r)^2 + (z-h)^2} \Rightarrow |z\hat{z} - r\hat{r} - h\hat{z}| = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$$

Reemplazando en la integral y desarrollando:

$$\Rightarrow V(z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^H \int_0^{\frac{A}{2}-h\tan(\alpha)} \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} d\phi dr dh$$

Ya que la función que se integra no depende de ϕ , entonces la integral con respecto a esta variable es directa y nos entrega un factor 2π :

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(z) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^H \int_0^{\frac{A}{2}-h\tan(\alpha)} \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} dr dh \right) \\ \Rightarrow V(z) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^H \int_0^{\frac{A}{2}-h\tan(\alpha)} \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} dr dh \\ \Rightarrow V(z) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^H \int_0^{\frac{A}{2}-h\tan(\alpha)} \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} dr dh \end{aligned} \quad (2)$$

La integral asociada a la coordenada radial r se resuelve con el siguiente cambio de variable:

$$u = r^2 + (z-h)^2 \quad (3)$$

Con este cambio de variable los límites de integración cambian:

$$r = 0 \Rightarrow u = (z-h)^2 \quad ; \quad r = \frac{A}{2} - h\tan(\alpha) \Rightarrow u = \left(\frac{A}{2} - h\tan(\alpha) \right)^2 + (z-h)^2$$

El cambio de variable se reemplaza de forma directa en el denominador. Para el numerador debemos escribir rdr en función de u y du . A partir de la expresión (3) se tiene lo siguiente:

$$du = 2rdr \Rightarrow rdr = \frac{1}{2}du$$

Reemplazamos todo en la integral (2):

$$V(z) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^H \left[\int_{r=0}^{r=\frac{A}{2}-h\tan(\alpha)} \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} dr \right] dh = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^H \left[\int_{u=(z-h)^2}^{u=\left(\frac{A}{2}-h\tan(\alpha)\right)^2+(z-h)^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} \right] dh$$

Sacamos el factor $\frac{1}{2}$ de la integral y desarrollamos, entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(z) &= \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \int_0^H \left[\int_{(z-h)^2}^{\left(\frac{A}{2}-h\tan(\alpha)\right)^2+(z-h)^2} u^{-\frac{1}{2}} du \right] dh = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \int_0^H \left[2u^{\frac{1}{2}} \right]_{(z-h)^2}^{\left(\frac{A}{2}-h\tan(\alpha)\right)^2+(z-h)^2} dh \\ \Rightarrow V(z) &= \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \int_0^H \left[2 \left(\left(\frac{A}{2} - h\tan(\alpha) \right)^2 + (z-h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 2 \left((z-h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dh \end{aligned}$$

Sacamos el factor 2 de la integral, y escribimos las potencias con exponente $\frac{1}{2}$ como raíces cuadradas. Entonces:

$$\Rightarrow V(z) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \int_0^H \left[\sqrt{\left(\frac{A}{2} - h \tan(\alpha)\right)^2 + (z-h)^2} - \sqrt{(z-h)^2} \right] dh \quad (4)$$

Ahora, separamos la integral en la resta de dos integrales, las cuales se muestran a continuación:

$$I_1 = \int_0^H \sqrt{(z-h)^2} dh \quad ; \quad I_2 = \int_0^H \sqrt{\left(\frac{A}{2} - h \tan(\alpha)\right)^2 + (z-h)^2} dh \quad (5)$$

Partamos por la integral I_1 . Ya que $z \in (-\infty, \infty)$, en el caso general la raíz cuadrada y el exponente 2 deben reemplazarse con un valor absoluto, entonces:

$$I_1 = \int_0^H |z-h| dh$$

Para resolver esta integral debemos ponernos en distintos casos de z para eliminar el valor absoluto de forma correcta, tomando en consideración que $h \in [0, H]$. El primer caso corresponde a calcular el potencial en un punto por debajo del cono, es decir, $z < 0$, y como $0 \leq h \leq H$, entonces en este caso $h > z$ en todos los puntos de la integral, de tal forma que $|z-h| = h-z$, y así:

$$I_1 = \int_0^H (h-z) dh = \int_0^H h dh - z \int_0^H dh \Rightarrow I_1 = \frac{H^2}{2} - zH \quad ; \quad z < 0 \quad (6)$$

El segundo caso corresponde a calcular el potencial en un punto dentro del cono, es decir, $0 \leq z \leq H$. Como $0 \leq h \leq H$, entonces en este caso debemos separar el dominio de integración en dos partes, de tal forma que en una parte de la integral $z < h$ y en la otra $z > h$, y así podemos eliminar el valor absoluto de forma correcta. Entonces, en el caso $0 < z < H$:

$$I_1 = \int_0^H |z-h| dh = \int_0^z |z-h| dh + \int_z^H |z-h| dh$$

En la primera integral se cumple que $z > h$, por lo tanto, $|z-h| = z-h$. Por otro lado en la segunda integral se tiene que $z < h$, por lo tanto, $|z-h| = h-z$. Reemplazando en las integrales:

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1 &= \int_0^z (z-h) dh + \int_z^H (h-z) dh = z \int_0^z dh - \int_0^z h dh + \int_z^H h dh - z \int_z^H dh \\ \Rightarrow I_1 &= z^2 - \frac{z^2}{2} + \frac{H^2}{2} - \frac{z^2}{2} - zH + z^2 \Rightarrow I_1 = \frac{H^2}{2} - zH + z^2 \quad ; \quad 0 \leq z \leq H \end{aligned} \quad (7)$$

El tercer caso corresponde a calcular el potencial en un punto por encima del cono, es decir, $z > H$, y como $0 \leq h \leq H$, entonces en este caso $h < z$ en todos los puntos de la integral, de tal forma que $|z-h| = z-h$, y así:

$$I_1 = \int_0^H (z-h) dh = z \int_0^H dh - \int_0^H h dh \Rightarrow I_1 = zH - \frac{H^2}{2} \quad ; \quad z > H \quad (8)$$

Ahora debemos resolver la integral I_2 mostrada en (5). Dado que en este caso la raíz no se cancela, no es necesario (hasta ahora) ponerse en los mismos casos que la integral I_1 . Desarrollamos los cuadrados dentro de la raíz y agrupamos términos asociados a distintas potencias de h , entonces:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^H \sqrt{\frac{A^2}{4} - A \tan(\alpha)h + \tan^2(\alpha)h^2 + z^2 - 2zh + h^2} dh \\ \Rightarrow I_2 &= \int_0^H \sqrt{(1 + \tan^2(\alpha))h^2 - (2z + A \tan(\alpha))h + \left(\frac{A^2}{4} + z^2\right)} dh \\ \Rightarrow I_2 &= \int_0^H \sqrt{\sec^2(\alpha)h^2 - (2z + A \tan(\alpha))h + \left(\frac{A^2}{4} + z^2\right)} dh \end{aligned}$$

Sacamos el factor $\sec^2(\alpha)$ de la integral³:

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_2 &= \int_0^H \sqrt{\sec^2(\alpha) \left[h^2 - \left(\frac{2z + A \tan(\alpha)}{\sec^2(\alpha)} \right) h + \left(\frac{A^2 + 4z^2}{4 \sec^2(\alpha)} \right) \right]} dh \\ \Rightarrow I_2 &= \sqrt{\sec^2(\alpha)} \int_0^H \sqrt{h^2 - \left(\frac{2z + A \tan(\alpha)}{\sec^2(\alpha)} \right) h + \left(\frac{A^2 + 4z^2}{4 \sec^2(\alpha)} \right)} dh \\ \Rightarrow I_2 &= \sec(\alpha) \int_0^H \sqrt{h^2 - \left(\frac{2z + A \tan(\alpha)}{\sec^2(\alpha)} \right) h + \left(\frac{A^2 + 4z^2}{4 \sec^2(\alpha)} \right)} dh \end{aligned}$$

Para ahorrar espacio definimos las siguientes constantes:

$$b = \frac{2z + A \tan(\alpha)}{\sec^2(\alpha)} \quad ; \quad c = \frac{A^2 + 4z^2}{4 \sec^2(\alpha)} \quad (9)$$

Es importante notar que estas cantidades son constantes con respecto a la variable de integración h , pero aún así dependen de la distancia z a la cual calculamos el potencial eléctrico, lo cual hay que tener en cuenta para los cambios de variables posteriores. Con estas constantes reescribimos la integral:

$$I_2 = \sec(\alpha) \int_0^H \sqrt{h^2 - bh + c} dh$$

Completamos el cuadrado dentro de la raíz sumando y restando el factor $\frac{b^2}{4}$ dentro de esta:

$$\Rightarrow I_2 = \sec(\alpha) \int_0^H \sqrt{h^2 - bh + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c} dh \Rightarrow I_2 = \sec(\alpha) \int_0^H \sqrt{\left(h - \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}} dh$$

El primer cambio de variable que aplicamos será $\xi = h - \frac{b}{2}$, con lo cual $dh = d\xi$. Por otro lado los límites de integración cambian:

$$h = 0 \Rightarrow \xi = -\frac{b}{2} \quad ; \quad h = H \Rightarrow \xi = H - \frac{b}{2}$$

³Para que el ejercicio tenga sentido físico necesitamos que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, y en ese dominio $\sec(\alpha) > 0$, con lo cual $\sqrt{\sec^2(\alpha)} = \sec(\alpha)$.

Entonces, reemplazando el cambio de variable en la integral I_2 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sec(\alpha) \int_{h=0}^{h=H} \sqrt{\left(h - \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}} dh = \sec(\alpha) \int_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\xi=H-\frac{b}{2}} \sqrt{\xi^2 + c - \frac{b^2}{4}} d\xi \\ &\Rightarrow I_2 = \sec(\alpha) \int_{-\frac{b}{2}}^{H-\frac{b}{2}} \sqrt{\xi^2 + c - \frac{b^2}{4}} d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

Ahora, para este tipo de integrales es conveniente usar un cambio de variable hiperbólico que nos permita simplificar la raíz aprovechando la identidad $\cosh^2(\beta) - \sinh^2(\beta) = 1$. En este caso el cambio de variable queda como:

$$\xi = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \sinh(\beta) \quad (11)$$

Antes de avanzar con este cambio de variable debemos recordar que debe ser consistente con los valores que puede tomar la constante $c - \frac{b^2}{4}$ al usar distintos valores de z , ya que si en un momento es negativo, entonces el cambio de variable no es válido⁴. Recordando las definiciones de b y c mostradas en (9) y desarrollando se tiene que:

$$\begin{aligned} c - \frac{b^2}{4} &= \frac{A^2}{4 \sec^2(\alpha)} + \frac{z^2}{\sec^2(\alpha)} - \frac{z^2}{\sec^4(\alpha)} - \frac{A \tan(\alpha) z}{\sec^4(\alpha)} - \frac{A^2 \tan^2(\alpha)}{4 \sec^4(\alpha)} \\ \Rightarrow c - \frac{b^2}{4} &= (\cos^2(\alpha) - \cos^4(\alpha)) z^2 - A \sin(\alpha) \cos^3(\alpha) z + \frac{A^2}{4} (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha)) \\ \Rightarrow c - \frac{b^2}{4} &= \cos^2(\alpha) (1 - \cos^2(\alpha)) z^2 - A \sin(\alpha) \cos^3(\alpha) z + \frac{A^2}{4} \cos^2(\alpha) (1 - \sin^2(\alpha)) \\ \Rightarrow c - \frac{b^2}{4} &= \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) z^2 - A \sin(\alpha) \cos^3(\alpha) z + \frac{A^2}{4} \cos^4(\alpha) \end{aligned}$$

La constante⁵ $c - \frac{b^2}{4}$ es una función cuadrática con respecto a la variable z , entonces podemos obtener algunas pistas de su comportamiento con respecto a esta variable. Primero, como la constante que acompaña a z^2 es estrictamente positiva, entonces la parábola asociada a la función cuadrática es convexa. Por otro lado podemos estudiar la existencia de raíces z_* :

$$\begin{aligned} z_* &= \frac{-(-A \sin(\alpha) \cos^3(\alpha)) \pm \sqrt{(-A \sin(\alpha) \cos^3(\alpha))^2 - 4 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) \frac{A^2}{4} \cos^4(\alpha)}}{2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha)} \\ \Rightarrow z_* &= \frac{A \sin(\alpha) \cos^3(\alpha) \pm \sqrt{A^2 \sin^2(\alpha) \cos^6(\alpha) - A^2 \sin^2(\alpha) \cos^6(\alpha)}}{2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha)} \\ \Rightarrow z_* &= \frac{A \sin(\alpha) \cos^3(\alpha)}{2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha)} \Rightarrow z_* = \frac{A}{2} \cot(\alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

Podemos notar que, independiente de la combinación de parámetros (es decir, independiente de los valores de A y α), la constante $c - \frac{b^2}{4}$ sólo tiene una raíz con respecto a la variable z . Esto, combinado con el hecho de que la parábola asociada a esta constante es convexa, nos permite asegurar que $c - \frac{b^2}{4} \geq 0$ para cualquier valor de $z \in (-\infty, \infty)$, con lo cual que el cambio de variable mostrado en

⁴Para efectos de la revisión del ejercicio se puede asumir que la constante es positiva.

⁵“Constante” con respecto a la variable de integración.

la expresión (11) es consistente⁶ desde el punto de vista matemático. Entonces, a partir de este cambio de variable se tiene lo siguiente:

$$\xi = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \sinh(\beta) \Rightarrow d\xi = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \cosh(\beta) d\beta$$

$$\xi = -\frac{b}{2} \Rightarrow \beta = \sinh^{-1} \left(-\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) = \beta_1 \quad ; \quad \xi = H - \frac{b}{2} \Rightarrow \beta = \sinh^{-1} \left(\frac{H - \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) = \beta_2 \quad (13)$$

Es importante notar que la nueva variable β es directamente proporcional a una función que tiene como recorrido el conjunto $(-\infty, \infty)$, lo que debemos tomar en cuenta al momento de realizar algún otro cambio de variable. Reemplazamos el cambio de variable en la integral (10), y entonces:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sec(\alpha) \int_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\xi=H-\frac{b}{2}} \sqrt{\xi^2 + c - \frac{b^2}{4}} d\xi = \sec(\alpha) \int_{\beta=\beta_1}^{\beta=\beta_2} \sqrt{\left(\sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \sinh(\beta) \right)^2 + c - \frac{b^2}{4}} \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \cosh(\beta) d\beta \\ &\Rightarrow I_2 = \sec(\alpha) \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cosh(\beta) \sqrt{\left(c - \frac{b^2}{4} \right) \sinh^2(\beta) + c - \frac{b^2}{4}} d\beta \\ &\Rightarrow I_2 = \sec(\alpha) \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cosh(\beta) \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \sqrt{\sinh^2(\beta) + 1} d\beta \\ &\Rightarrow I_2 = \sec(\alpha) \left(c - \frac{b^2}{4} \right) \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cosh(\beta) \sqrt{\cosh^2(\beta)} d\beta \end{aligned}$$

La función coseno hiperbólico es positiva para cualquier valor de $\beta \in (-\infty, \infty)$, por lo tanto en nuestro caso se cumple que $\sqrt{\cosh^2(\beta)} = \cosh(\beta)$, y así:

$$\Rightarrow I_2 = \sec(\alpha) \left(c - \frac{b^2}{4} \right) \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cosh^2(\beta) d\beta$$

En este punto podemos usar una la identidad $\cosh^2(\beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh(2\beta)$, entonces:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \sec(\alpha) \left(c - \frac{b^2}{4} \right) \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cosh(2\beta) d\beta \right] \\ &\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \sec(\alpha) \left(c - \frac{b^2}{4} \right) \left[\beta_2 - \beta_1 + \frac{1}{2} \sinh(2\beta_2) - \frac{1}{2} \sinh(2\beta_1) \right] \\ &\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \sec(\alpha) \left(c - \frac{b^2}{4} \right) \left[\sinh^{-1} \left(\frac{H - \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) - \sinh^{-1} \left(-\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{H - \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) \right) - \frac{1}{2} \sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(-\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

⁶En realidad el cambio de variable falla justo en el punto $z = z_*$, sin embargo al desarrollar la integral se llega a un resultado válido para este punto.

El seno hiperbólico inverso puede escribirse como un logaritmo natural para reemplazar en los dos primeros términos entre corchetes:

$$\sinh^{-1}(x) = \ln \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$$

Reemplazando esto y desarrollando la expresión se tiene que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \sec(\alpha) \left(c - \frac{b^2}{4} \right) & \left[\ln \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{H - \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right)^2 + 1} + \left(\frac{H - \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right)}{\sqrt{\left(\frac{-\frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right)^2 + 1} - \left(\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{H - \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) \right) - \frac{1}{2} \sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(-\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Retomando el problema del potencial eléctrico, recordando la expresión (4) se tiene finalmente⁷ que:

$$V(z) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (I_2(z) - I_1(z))$$

En donde:

$$I_1(z) = \begin{cases} \frac{H^2}{2} - zH & ; \quad z < 0 \\ \frac{H^2}{2} - zH + z^2 & ; \quad 0 \leq z \leq H \\ zH - \frac{H^2}{2} & ; \quad z > H \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \sec(\alpha) \left(c - \frac{b^2}{4} \right) & \left[\ln \left(\frac{\sqrt{\left(H - \frac{b}{2} \right)^2 + c - \frac{b}{2}} + H - \frac{b}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{b}{2} \right)^2 + c - \frac{b}{2}} - \frac{b}{2}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{H - \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) \right) - \frac{1}{2} \sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(-\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

- b) Recordemos que, en el caso general, las cargas eléctricas positivas tienden a moverse a aquellas zonas del espacio donde el potencial eléctrico es mínimo, mientras que las cargas eléctricas negativas se desplazan a aquellas zonas del espacio donde el potencial eléctrico es máximo. Con esto en mente, y con las condiciones geométricas de nuestra distribución de carga, podemos hacernos una leve idea de la forma del gráfico del potencial eléctrico, o cuál debería ser su comportamiento general al variar z . Primero, como nuestra distribución de carga es finita (es decir, no hay cargas en el infinito), entonces el resultado para $z \rightarrow \infty$ debe ser que el potencial se anula⁸, lo cual puede comprobarse al tomar el

⁷No es práctico poner todo en una sola expresión, por lo tanto lo dejaré expresado de esta forma

⁸Esto puede entenderse como que, para distancias grandes, nuestra distribución finita se parece a una carga puntual, para la cual el potencial se anula en el infinito.

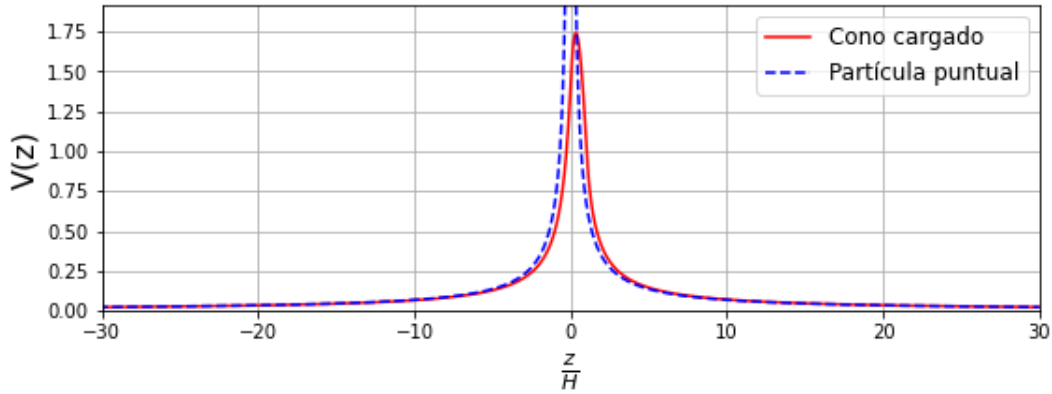


Figura 2: Potencial para el cono y una carga puntual, donde se muestra el comportamiento para $z \rightarrow \pm\infty$.

límite correspondiente al resultado de la parte anterior, y puede apreciarse también en la Figura 2 (donde se usan los datos $\rho_0 = 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$, $H = 1 \text{ m}$, $A = 1,5 \text{ m}$). Por otro lado, si el cono es lo suficientemente alargado (es decir, si H es lo suficientemente grande con respecto a A), entonces debería existir un punto dentro de este en el cual una carga positiva Q permanezca estable, ya que existirá un equilibrio entre las fuerzas de repulsión que vienen desde la porción inferior y superior del cono, es decir, para valores de A lo suficientemente pequeños existirá un mínimo local del potencial eléctrico dentro del cono, tal como se muestra en la Figura 3. Para casos en donde el cono es muy achatado, puede que esto no se cumpla necesariamente para una carga positiva, sin embargo esta distribución aún debería ser capaz de atraer cargas negativas, por lo tanto debe existir un máximo de esta función para cualquier valor de A y H .

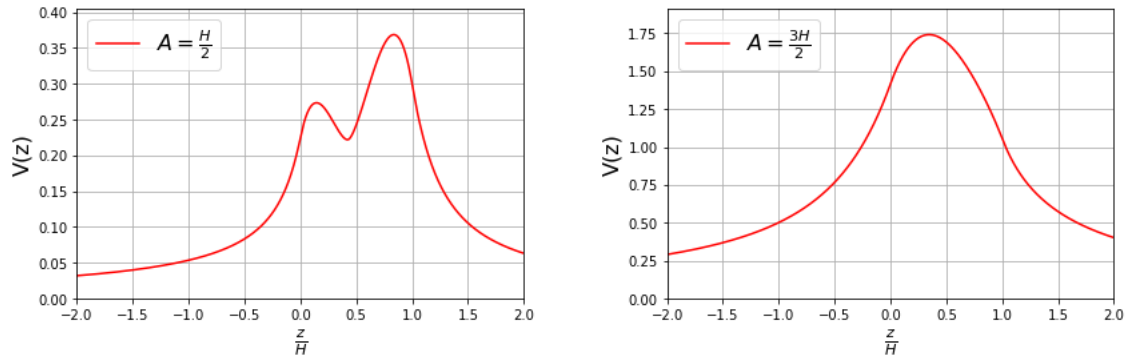


Figura 3: Gráfico de $V(z)$ con $\rho_0 = 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$, $H = 1 \text{ m}$, y distintos valores de A .