

FI2002-2 Electromagnetismo.

Profesor: Marcel Clerc.

Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.



Desarrollo Auxiliar 7: Condensadores y dieléctricos.

12 de Octubre del 2022

P1. Condensador cilíndrico doble:

- a) Un condensador corresponde a un objeto capaz de acumular carga eléctrica de una manera tal que permite almacenar energía en forma de un campo eléctrico. Los condensadores pueden tener muchas formas distintas y disponer de muchos materiales diferentes, pero a modo general están compuestos por dos superficies conductoras separadas por vacío o por un material dieléctrico, donde cada placa tiene una carga eléctrica de magnitud Q , con signo contrario entre ellas. Estas placas están en una situación de *influencia total*, lo que significa que sólo existe campo eléctrico en el espacio que hay entre las placas conductoras del condensador, mientras que en el resto del espacio se asume que $\vec{E} = \vec{0}$. Este campo eléctrico es directamente proporcional a la carga Q asociada a las placas del condensador, y por lo tanto si calculamos la diferencia de potencial V entre las placas, esta cantidad también será directamente proporcional a Q , es decir, podemos escribir:

$$Q = CV \quad (1)$$

En esta expresión la constante de proporcionalidad C se conoce como **capacitancia** del condensador, y corresponde a una magnitud que nos permite entender qué tan bueno es el condensador para almacenar energía. Esta energía U almacenada por el condensador puede escribirse en función de Q y V , ó en función de Q y C si desarrollamos con la expresión anterior:

$$U = \frac{1}{2}QV \Rightarrow U = \frac{Q^2}{2C} \quad (2)$$

Si despejamos C de las expresiones (1) y (2) encontraremos dos relaciones que nos permiten calcular la capacitancia para un condensador cualquiera:

$$C = \frac{Q}{V} \quad ; \quad C = \frac{Q^2}{2U} \quad (3)$$

Ambas expresiones son igual de válidas, por lo tanto la elección en un problema particular se basa en si es más sencillo obtener la diferencia de potencial V (en cuyo caso usamos la primera expresión) o si es más sencillo obtener la energía U del condensador (en este caso usamos la segunda expresión). De todas formas, cualquiera de las dos elecciones requiere que podamos encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ en el espacio entre las placas del condensador, que corresponde al punto de partida en este tipo de sistemas.

Ahora, en esta primera parte del ejercicio se tiene un condensador formado por dos casquetes conductores cilíndricos concéntricos de largo L . El casquete interior (de radio a) tiene carga Q , mientras que el casquete exterior (de radio c) tiene carga $-Q$. El espacio entre los casquetes se llena con dos materiales con constantes dieléctricas ε_1 y ε_2 formando un par de capas cilíndricas, tal como se ilustra en la Figura 1. Dado que existe simetría axial, nos conviene usar ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ en la zona entre casquetes conductores, sin embargo, dado que tenemos materiales dieléctricos, debemos aplicar la ley de Gauss para el vector desplazamiento $\vec{D}$, la cual nos dice que:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}} \quad (4)$$

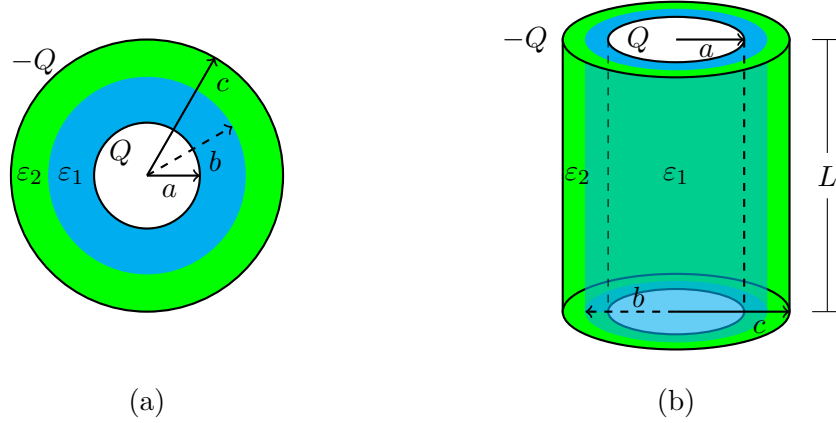


Figura 1: Condensador de dos capas: (a) vista superior, (b) vista lateral.

Por la simetría axial podemos escribir $\vec{D} = D(\rho)\hat{\rho}$, donde ρ y $\hat{\rho}$ son, respectivamente, la coordenada radial y vector unitario radial de las coordenadas cilíndricas con origen en el eje de simetría del cilindro, justo en la mitad de su longitud. Tomando en cuenta esto, para la ley de Gauss (4) usamos $d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho}$, donde ρ es el radio del cilindro gaussiano a utilizar, $z \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ (con L el largo del cilindro) y $\phi \in [0, 2\pi)$. Por otro lado, como la carga del sistema sólo está contenida en los casquetes, y el único casquete encerrado por el cilindro gaussiano es el de radio a , entonces se tiene que $Q_{\text{enc}} = Q$. Reemplazando todo en la ley de Gauss y desarrollando se tiene que:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_{\text{enc}} \Rightarrow \oint_S (D(\rho)\hat{\rho}) \cdot (\rho d\phi dz \hat{\rho}) = Q \\ 2\pi L \rho D(\rho) &= Q \Rightarrow D(\rho) = \frac{Q}{2\pi L \rho} \Rightarrow \vec{D}(\rho) = \frac{Q}{2\pi L \rho} \hat{\rho} \end{aligned}$$

Ahora, es importante entender que por la condición de influencia total, el vector desplazamiento $\vec{D}$ en las zonas fuera del condensador es cero¹. Tomando en cuenta que nos encontramos con medios dieléctricos que son lineales, isótropos y homogéneos, se cumple la condición $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r})$, donde ϵ es la constante dieléctrica asociada al material que se encuentra en el punto $\vec{r}$ del espacio. Tomando en cuenta eso, en este caso tendremos dos expresiones distintas para el campo eléctrico, ya que tenemos dos materiales con constantes dieléctricas distintas. Ya que ϵ_1 está asociada al material que está entre a y b , mientras que ϵ_2 está asociada al material que está entre b y c , entonces:

$$\vec{E}(\rho) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi L \epsilon_1 \rho} \hat{\rho} & ; \quad a \leq \rho < b \\ \frac{Q}{2\pi L \epsilon_2 \rho} \hat{\rho} & ; \quad b \leq \rho < c \\ \vec{0} & ; \quad \text{En otro caso} \end{cases} \quad (5)$$

Ahora que tenemos el campo eléctrico $\vec{E}$ podemos calcular la diferencia de potencial V o la energía U asociada al condensador. En este caso con simetría axial a lo largo de todo el cilindro, conviene calcular la diferencia de potencial V entre las placas.

¹Esto también puede inferirse del hecho de que, en zonas fuera del condensador, se suma la carga $-Q$ del cascarón externo, por lo tanto $Q_{\text{enc}} = 0$ y así $\vec{D} = \vec{0}$.

Entonces, usando $d\vec{l} = d\rho\hat{\rho}$ (en virtud de la simetría axial) se tiene lo siguiente:

$$V = V(a) - V(c) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_c} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^c (E(\rho)\hat{\rho}) \cdot (d\rho\hat{\rho}) \Rightarrow V = \int_a^c E(\rho)d\rho$$

Como $\vec{E}$ está definido por partes, separamos la integral en dos, entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \int_a^b \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_1 \rho} d\rho + \int_b^c \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_2 \rho} d\rho = \frac{Q}{2\pi L} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_b^c \frac{d\rho}{\rho} \right] \\ \Rightarrow V &= \frac{Q}{2\pi L} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} (\ln(b) - \ln(a)) + \frac{1}{\varepsilon_2} (\ln(c) - \ln(b)) \right] \\ \Rightarrow V &= \frac{Q}{2\pi L} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right] \end{aligned}$$

Reemplazando esta diferencia de potencial en la primera expresión mostrada en (3) y desarrollando, se tiene que:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]} \Rightarrow C = 2\pi L \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]^{-1}$$

Ahora, es importante notar que este sistema es equivalente a dos condensadores cilíndricos simples conectados en serie. En clases se mostró que la capacitancia de un condensador cilíndrico de largo ℓ , radio interior R_{int} , radio exterior R_{ext} y relleno con un material dieléctrico ε es:

$$C_{\text{cil}} = \frac{2\pi\ell\varepsilon}{\ln\left(\frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{int}}}\right)} \quad (6)$$

Si tomamos en cuenta que cada capa de dieléctrico funciona como un condensador independiente, entonces con la expresión anterior podemos calcular la capacitancia asociada a cada una de estas capas. Para el dieléctrico interior se tiene que $\ell = L$, $R_{\text{int}} = a$, $R_{\text{ext}} = b$ y $\varepsilon = \varepsilon_1$, mientras que para el dieléctrico exterior se tiene que $\ell = L$, $R_{\text{int}} = b$, $R_{\text{ext}} = c$ y $\varepsilon = \varepsilon_2$. Entonces:

$$C_1 = \frac{2\pi L \varepsilon_1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad ; \quad C_2 = \frac{2\pi L \varepsilon_2}{\ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

La capacitancia equivalente de un par de condensadores en serie se calcula como el inverso de la suma del inverso de sus capacitancias, entonces:

$$C_{eq} = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right]^{-1} = \left[\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi L \varepsilon_1} + \frac{\ln\left(\frac{c}{b}\right)}{2\pi L \varepsilon_2} \right]^{-1} \Rightarrow C_{eq} = 2\pi L \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]^{-1}$$

Entonces, con esto se puede concluir que el sistema de esta parte del ejercicio es equivalente a un sistema de dos condensadores en serie.

- b) En esta parte del ejercicio se tiene un condensador cilíndrico formado por dos mitades con materiales dieléctricos distintos, tal como se muestra en la Figura 2. En este caso se tiene simetría axial, sin embargo se rompe la homogeneidad asociada al eje $\hat{k}$, ya que al ir moviéndonos a lo largo de este eje cambia el material dieléctrico que llena al condensador, por lo tanto cambian los parámetros del sistema. A pesar de esto, en cada zona con distinto dieléctrico el campo eléctrico sólo depende de la

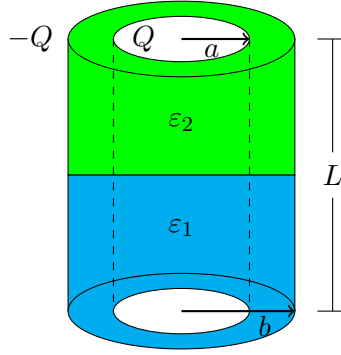


Figura 2: Condensador formado por dos mitades distintas.

distancia radial ρ . Tomando en cuenta esto, podemos asumir que en cada zona existe un campo eléctrico $\vec{E}_1(\rho)$ y $\vec{E}_2(\rho)$, es decir:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} E_1(\rho)\hat{\rho} & ; \quad -\frac{L}{2} \leq z < 0 \quad ; \quad a \leq \rho \leq b \\ E_2(\rho)\hat{\rho} & ; \quad 0 < z \leq \frac{L}{2} \quad ; \quad a \leq \rho \leq b \\ \vec{0} & ; \quad \text{En otro caso} \end{cases}$$

Ahora debemos recordar las condiciones de borde en la frontera de materiales eléctricos, las cuales relacionan los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en los distintos materiales:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad ; \quad \vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n}$$

La primera condición de borde nos dice que la componente del campo eléctrico $\vec{E}$ que es tangencial a la interfaz entre los dieléctricos es continua, mientras que la segunda condición nos dice que en el caso del vector desplazamiento $\vec{D}$, es la componente normal a la interfaz la que es continua. En el caso de este ejercicio, como el campo eléctrico es radial en ambos materiales, entonces se tiene que $\vec{E}$ es tangencial a la interfaz de los dieléctricos en todos los puntos de esta (es decir, sólo existe componente tangencial), y como el campo no depende de la altura en cada zona, entonces se tiene que $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_1(\rho)$ y $\vec{E}_{2t} = \vec{E}_2(\rho)$. Con estas condiciones se puede concluir que $E_1(\rho) = E_2(\rho)$, es decir:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} E(\rho)\hat{\rho} & ; \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad ; \quad a \leq \rho \leq b \\ \vec{0} & ; \quad \text{En otro caso} \end{cases}$$

Ahora, para encontrar este campo aplicamos la ley de Gauss para medios dieléctricos:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}} \Rightarrow \oint_S (D(\rho)\hat{\rho}) \cdot (\rho d\phi dz \hat{\rho}) = Q$$

Tomando en cuenta que la constante dieléctrica cambia con la altura, entonces es lógico pensar que $\vec{D}$ también lo hará, entonces:

$$\Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} D(\rho) \rho d\phi dz = Q \Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^0 \int_0^{2\pi} D_1(\rho) \rho d\phi dz + \int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} D_2(\rho) \rho d\phi dz = Q$$

Asumiendo materiales lineales, isotrópicos y homogéneos se tiene que $D_1 = \varepsilon_1 E_1$ y $D_2 = \varepsilon_2 E_2$, mientras que anteriormente se demostró que $E_1 = E_2 = E(\rho)$, entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^0 \int_0^{2\pi} \varepsilon_1 E(\rho) \rho d\phi dz + \int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_2 E(\rho) \rho d\phi dz &= Q \Rightarrow \pi L \varepsilon_1 E(\rho) \rho + \pi L \varepsilon_2 E(\rho) \rho = Q \\ \Rightarrow E(\rho) &= \frac{Q}{\pi L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho} \Rightarrow \vec{E}(\rho) = \frac{Q}{\pi L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho} \hat{\rho} \end{aligned}$$

Entonces, con esto el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{\pi L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho} \hat{\rho} & ; \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad ; \quad a \leq \rho \leq b \\ \vec{0} & ; \quad \text{En otro caso} \end{cases} \quad (7)$$

Por otro lado, como tenemos $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, entonces:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q \varepsilon_1}{\pi L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho} \hat{\rho} & ; \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq 0 \quad ; \quad a \leq \rho \leq b \\ \frac{Q \varepsilon_2}{\pi L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho} \hat{\rho} & ; \quad 0 < z \leq \frac{L}{2} \quad ; \quad a \leq \rho \leq b \\ \vec{0} & ; \quad \text{En otro caso} \end{cases} \quad (8)$$

Como tenemos los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$, podemos calcular la diferencia de potencial o la energía potencial del condensador, y a partir de cualquiera de estas dos cantidades podemos obtener la capacitancia. Para variar lo hecho en la parte (a), esta vez calcularemos la energía U del condensador. La energía U asociada a un campo eléctrico $\vec{E}$ está dada por la siguiente expresión:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Espacio}} \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

Es importante entender que esta integral se calcula **en todo el espacio**, por lo tanto, en los casos donde nuestros campos estén definidos hasta el infinito, debemos integrar hasta ese punto. En el caso de los condensadores es conveniente ya que se tiene la condición de influencia total entre las placas, por lo tanto el campo eléctrico $\vec{E}$ y el vector desplazamiento $\vec{D}$ están definidos sólo en el espacio entre las placas (en el resto del espacio $\vec{E} = \vec{D} = \vec{0}$). Entonces:

$$U = \frac{1}{2} \int_a^b \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (E(\rho) \hat{\rho}) \cdot (D(\rho) \hat{\rho}) \rho d\phi dz d\rho$$

En este caso $E(\rho)$ es el mismo en todos los puntos dentro del condensador, sin embargo $D(\rho)$ depende del material dieléctrico en el cual nos encontramos. Entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \frac{1}{2} \left[\int_a^b \int_{-\frac{L}{2}}^0 \int_0^{2\pi} (E(\rho) \hat{\rho}) \cdot (D(\rho) \hat{\rho}) \rho d\phi dz d\rho + \int_a^b \int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} (E(\rho) \hat{\rho}) \cdot (D(\rho) \hat{\rho}) \rho d\phi dz d\rho \right] \\ \Rightarrow U &= \frac{1}{2} \left[\int_a^b \int_{-\frac{L}{2}}^0 \int_0^{2\pi} \frac{Q^2 \varepsilon_1}{\pi^2 L^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \rho^2} \rho d\phi dz d\rho + \int_a^b \int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{Q^2 \varepsilon_2}{\pi^2 L^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \rho^2} \rho d\phi dz d\rho \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U = \frac{Q^2}{2\pi^2 L^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \left[\varepsilon_1 \int_a^b \int_{-\frac{L}{2}}^0 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} d\phi dz d\rho + \varepsilon_2 \int_a^b \int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} d\phi dz d\rho \right]$$

Como el integrando no depende de ϕ o z , las integrales con respecto a estas variables son directas, entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \frac{Q^2}{2\pi^2 L^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \left[2\pi \frac{L}{2} \varepsilon_1 \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho + 2\pi \frac{L}{2} \varepsilon_2 \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho \right] \\ \Rightarrow U &= \frac{Q^2}{2\pi L (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \left[\varepsilon_1 \ln \left(\frac{b}{a} \right) + \varepsilon_2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right] \Rightarrow U = \frac{Q^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right)}{2\pi L (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{aligned}$$

Entonces, usando la definición de capacitancia mostrada en (3) y que involucra la energía U del condensador, se tiene que:

$$C = \frac{Q^2}{2U} = \frac{Q^2}{2} \frac{2\pi L (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{Q^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi L (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}}$$

Ahora, es importante notar que este sistema es equivalente a dos condensadores cilíndricos simples conectados en paralelo. Usando la expresión (6), para el dieléctrico inferior se tiene que $\ell = \frac{L}{2}$, $R_{\text{int}} = a$, $R_{\text{ext}} = b$ y $\varepsilon = \varepsilon_1$, mientras que para el dieléctrico superior se tiene que $\ell = \frac{L}{2}$, $R_{\text{int}} = a$, $R_{\text{ext}} = b$ y $\varepsilon = \varepsilon_2$, entonces:

$$C_1 = \frac{\pi L \varepsilon_1}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \quad ; \quad C_2 = \frac{\pi L \varepsilon_2}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

La capacitancia equivalente de un par de condensadores en paralelo se calcula como la suma de las capacitancias individuales, entonces:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 = \frac{\pi L \varepsilon_1}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} + \frac{\pi L \varepsilon_2}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \Rightarrow C_{\text{eq}} = \frac{\pi L (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

Entonces, con esto se puede concluir que el sistema de esta parte del ejercicio es equivalente a un sistema de dos condensadores en paralelo.