

Tarea 3: Problema 5

Profesor: César Fuentes
Auxiliares: Daniel Lobos
Álvaro Flores
Ayudante: Catalina Vargas

1 de diciembre de 2022

Problema 5

Una masa m está fija a un punto en el borde de una rueda de radio R como se muestra en la figura. La rueda no tiene masa, excepto por una masa M ubicada en su centro. La rueda rueda sin resbalar en una mesa horizontal.

- Encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo en que rueda la rueda.
- Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

- a) Para encontrar la ecuación de movimiento, podemos usar la ecuación de suma de torques. Esta ecuación requiere que consideremos el torque y momento angular con respecto a algún origen O , y en este caso la mejor elección corresponde a considerar el origen en el único punto que siempre está en contacto con la superficie (que no es siempre el mismo punto del sólido, pues está rotando). Con esto, la ecuación de movimiento es

$$\tau_O = \dot{L}_O. \quad (1)$$

En primer lugar, necesitamos encontrar el momento angular del sistema, y como tenemos un sistema de dos partículas que se mueven a una misma velocidad angular (pues están en una rueda), tendremos que el momento angular corresponde a

$$L_O = I_O \omega_O, \quad (2)$$

donde I_O es el momento de inercia del sistema y ω_O la velocidad angular. Siguiendo el ángulo del dibujo, tendremos que la velocidad angular corresponde a $\omega_O = -\dot{\theta}\hat{z}$, y por otro lado el momento de inercia estará dado por la suma de los momentos de inercia de cada masa con respecto al origen. Como son partículas puntuales, sus momentos de inercia están dados por el producto de su masa por la distancia al origen al cuadrado, es decir:

$$I_O = MR^2 + md^2, \quad (3)$$

donde d corresponde a la distancia entre el origen O y la posición de la masa m , y esta distancia la podemos calcular a partir del teorema del coseno aplicado al triángulo cuyos vértices corresponden al centro de la rueda, la masa m y el origen O :

$$d^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta = 2R^2(1 - \cos \theta). \quad (4)$$

Ahora, tenemos que calcular los torques con respecto al origen. Como en el sistema solo hay dos partículas y no existen contactos, las únicas fuerzas involucradas son los pesos de ambas partículas. Así, las fuerzas involucradas son:

$$\mathbf{F}_m = -mg\hat{y} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_M = -Mg\hat{y}. \quad (5)$$

La posición de la masa M con respecto al punto O es

$$\mathbf{r}_M = R\hat{y}, \quad (6)$$

de modo que el torque asociado a esta fuerza es

$$\tau_M = R\hat{y} \times -Mg\hat{y} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Luego, la única fuerza que permite la existencia del movimiento en la rueda es el peso de la masa m , cuya posición con respecto a O podemos calcularla según la geometría, y obtenemos que

$$\mathbf{r}_m = R\hat{\mathbf{y}} - R\cos\theta\hat{\mathbf{y}} - R\sin\theta\hat{\mathbf{x}}, \quad (8)$$

de modo que el torque asociado es

$$\boldsymbol{\tau}_m = R((1 - \cos\theta)\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\hat{\mathbf{x}}) \times -mg\hat{\mathbf{y}} = mgR\sin\theta\hat{\mathbf{z}}. \quad (9)$$

Tenemos, entonces, los elementos necesarios para aplicar en la ecuación de movimiento. Reemplazando todo lo obtenido en 1:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_O &= \dot{\mathbf{L}}_O \\ \boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_M &= \frac{d}{dt}[(MR^2 + md^2)(-\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}})] \\ mgR\sin\theta &= -(MR^2 + md^2)\ddot{\theta} - m\frac{d}{dt}(d^2)\dot{\theta} \\ mgR\sin\theta &= -(MR^2 + md^2)\ddot{\theta} - m2d\dot{d}\dot{\theta} \\ mgR\sin\theta &= -[MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta)]\ddot{\theta} - 2m\sqrt{2R^2(1 - \cos\theta)}\frac{d}{dt}\sqrt{2R^2(1 - \cos\theta)}\dot{\theta} \\ mgR\sin\theta &= -[MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta)]\ddot{\theta} - 2m\sqrt{2R^2(1 - \cos\theta)}\frac{2R^2\sin\theta\dot{\theta}}{2\sqrt{2R^2(1 - \cos\theta)}}\dot{\theta} \\ mgR\sin\theta &= -[MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta)]\ddot{\theta} - 2mR^2\dot{\theta}^2\sin\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Finalmente, reordenando se obtiene la ecuación de movimiento del sistema:

$$[M + 2m(1 - \cos\theta)]R\ddot{\theta} + 2mR\dot{\theta}^2\sin\theta + mg\sin\theta = 0. \quad (11)$$

- b)** Para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones tenemos que considerar $\theta \ll 1$, por lo que expandimos hasta primer orden las funciones involucradas en la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{6} + \mathcal{O}(\theta^5) \approx \theta \\ \cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \mathcal{O}(\theta^4) \approx 1 \\ \dot{\theta}^2 &\approx 0 \end{aligned} \quad (12)$$

y por lo tanto obtenemos la ecuación de movimiento armónico simple

$$\begin{aligned} MR\ddot{\theta} + mg\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{mg}{MR}\theta &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

así que la frecuencia de pequeñas oscilaciones corresponde a

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{MR}}. \quad (14)$$