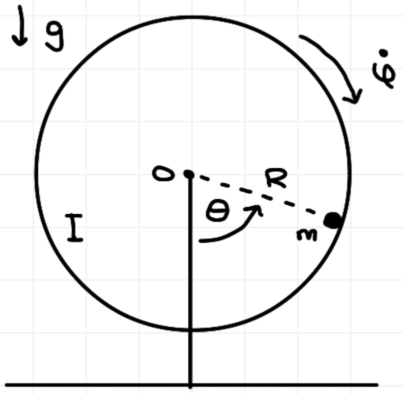
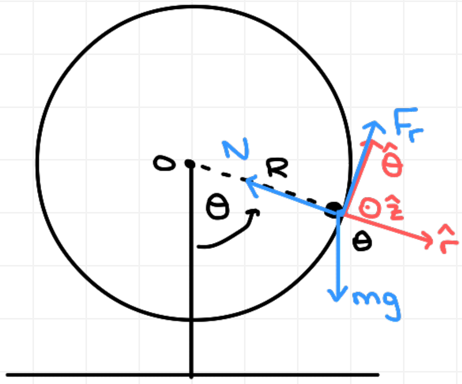
P1



A)



$\vec{N} = -N\hat{r}$

$m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$

$\vec{F_r} = F_r\,\hat{\theta} \longrightarrow$ sigue al mov. del hámster porque no resbala con la jaula

B) $\dot{\vec{L}}_o = \vec{\tau}_o$

hámster :

$$\vec{\tau}_o^{\,h} = \cancel{R\hat{r} \times -N\hat{r}} + R\hat{r} \times mg(\cancel{\cos\theta\,\hat{r}} - \sin\theta\,\hat{\theta}) + R\hat{r} \times F_r\,\hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_o^{\,h} = -mgR\sin\theta\,\hat{z} + RF_r\,\hat{z}}$$

$$\vec{L}_o^{\,h} = I_o^h\,\dot{\theta}\,\hat{z} = mR^2\dot{\theta}\,\hat{z} \longrightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_o^{\,h} = mR^2\ddot{\theta}\,\hat{z}}$$

$$mR^2\ddot{\theta} = RF_r - mgR\sin\theta$$

$$\boxed{mR\ddot{\theta} = F_r - mg\sin\theta} \qquad (1)$$

jaula :

$$\vec{\tau}_o^{\,j} = \cancel{R\hat{r} \times N\hat{r}} + R\hat{r} \times -F_r\,\hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_o^{\,j} = -RF_r\,\hat{\theta}}$$

$$\vec{L}_o^{\,j} = -I_o^j\,\dot{\varphi}\,\hat{z} = -I\dot{\varphi}\,\hat{z} \longrightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_o^{\,j} = -I\ddot{\varphi}\,\hat{z}}$$

$$-I\ddot{\varphi} = -RF_r$$

$$\boxed{I\ddot{\varphi} = RF_r} \qquad (2)$$

c) Sabemos que la rapidez relativa del hámster c/r a la jaula es cte. y vale v_0. Esto significa que

$$\vec{v}_{h/j} = \vec{v}_h - \vec{v}_j = v_0\hat{\theta}$$

donde $\vec{v}_h = R\dot{\theta}\hat{\theta}$ y $\vec{v}_j = -R\dot{\varphi}\hat{\theta}$. Así:

$$R\dot{\theta}\hat{\theta} - (-R\dot{\varphi}\hat{\theta}) = v_0\hat{\theta}$$

$$R(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) = v_0$$

$$\frac{d}{dt} \qquad \boxed{\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} = 0}$$

Reemplazando esta relación en (2):

$$-I\ddot{\theta} = RF_r$$

y esta otra en (1):

$$mR\ddot{\theta} = -\frac{I\ddot{\theta}}{R} - mg\sin\theta$$

$$(mR^2 + I)\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgR}{mR^2 + I}\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

Considerando pequeños desplazamientos c/r a la pos. de eq. estable $\theta = 0$, tenemos $\sin\theta \approx \theta$, y por lo tanto un movimiento armónico simple:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \qquad \text{con} \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgR}{mR^2 + I}}$$

$$\boxed{\theta(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t}$$

Las condiciones iniciales son

$$\theta(0) = 0 \qquad y \qquad \dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}$$

por lo que:

$$\theta(0) = B = 0$$

$$\theta(t) = A \sin \omega t$$

$$\dot{\theta}(t) = A\omega \cos \omega t$$

$$\dot{\theta}(0) = A\omega = \frac{V_0}{R} \longrightarrow A = \frac{V_0}{\omega R}$$

$$\theta(t) = \frac{V_0}{\omega R} \sin \omega t$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{V_0}{R}\sqrt{\frac{mR^2+I}{mgR}} \sin \sqrt{\frac{mgR}{mR^2+I}}\, t}$$

D) Necesitamos integrar la ec. de mov. (3):

$$\ddot{\theta} + \frac{mgR}{mR^2+I}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta \qquad \Big/ \; \ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \longrightarrow \text{separación de var.}$$

$$\int_{V_0/R}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = -\omega^2 \int_0^{\theta} \sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2 - \left(\frac{V_0}{R}\right)^2\right] = -\omega^2(-\cos\theta + 1)$$

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + 2\omega^2(\cos\theta + 1)$$

Para que el hámster pueda subir, $\dot{\theta}^2 \geq 0$

$$\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + 2\omega^2(\cos\theta - 1) \geq 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{\omega R}\right)^2 \geq 1 - \cos\theta$$

$$\theta \leq \arccos\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{\omega R}\right)^2\right] \qquad (4)$$

cambia de sentido porque la función arccos(x) es decreciente y para que suba avanzando $\theta > 0$

$$0 > \arccos\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\omega R}\right)^2\right]$$

$$\left(\frac{v_0}{\omega R}\right)^2 < 2$$

$$\boxed{v_0 < R\omega\sqrt{2}}$$

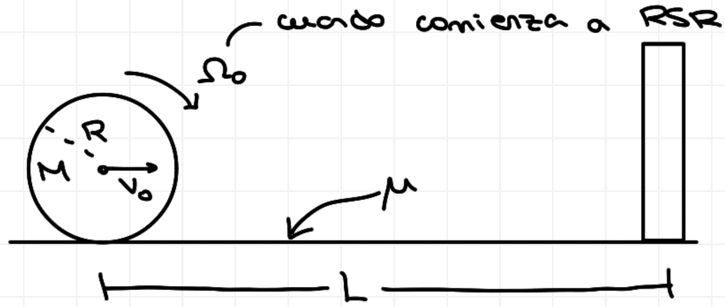
El desplazamiento máximo corresponde a la igualdad en (4)

$$\boxed{\theta_{máx} = \arccos\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{\omega R}\right)^2\right]}$$

E) Porque el ratón entrega energía al sistema para que la velocidad relativa se mantenga constante, es decir, el ratón se cansa :'(. ¿Cuánta energía entrega desde que comienza a correr hasta llegar al punto más alto? Podemos usar

$$\Delta E = W$$

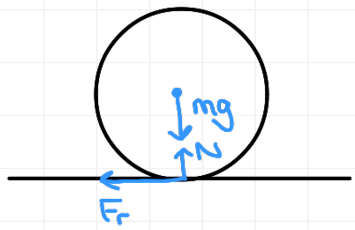
P2



A) fuerzas sobre la bola mientras desliza:

$$\vec{F}_r = -F_r\hat{x} \qquad \vec{N} = N\hat{y} \qquad m\vec{g} = -mg\hat{y}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{x}$$



$M\vec{a} = \vec{F} \longrightarrow$ · $\hat{x}$: $M\ddot{x} = -F_r = -\mu N$

· $\hat{y}$: $0 = N - mg$

$$M\ddot{x} = -\mu M g$$

$$\ddot{x} = -\mu g \qquad / \int$$

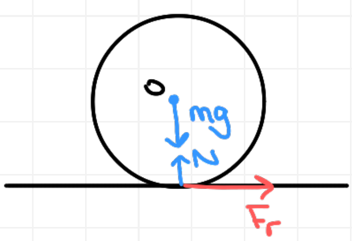
$$\dot{x} - \dot{x}_0 = -\mu g t$$

(1) $\boxed{\dot{x} = v_0 - \mu g t}$ ⟶ válida hasta $\bar{t}$ tal que $\dot{x} \geq 0$

↳ $t \leq \frac{v_0}{\mu g} = \bar{t}$

Después de $t^* \leq \bar{t}$ comenzará a rodar sin resbalar debido a la fricción, es decir, $\underbrace{x = R\theta}_{RSR} \longrightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$.

Por otro lado, los torques sobre la bola serán (cuando RSR)



$$\vec{\tau}_0 = \underbrace{\vec{0} \times -Mg\hat{y}}_{\text{peso aplica en el CM y la bola es homogénea}} + \cancel{-R\hat{y}\times N\hat{y}} + -R\hat{y}\times F_r\hat{x}$$

$$\vec{\tau}_0 = RF_r\hat{z} = R\mu M g\hat{z}$$

El mom. ang. es

$$\vec{L}_0 = I_0\dot{\theta}\hat{z} \longrightarrow I_0\ddot{\theta} = R\mu M g \qquad / \int dt, \ \dot{\theta}_0 = -\Omega_0$$

$$\boxed{I(\dot{\theta} + \Omega_0) = R\mu M g t} \quad (2)$$

B) Juntando (1) y RSR:

$$R\dot{\theta} = v_0 - \mu g t \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R} - \frac{\mu g}{R} t$$

y esta con (3)

$$I\left(\frac{v_0 - \mu g t}{R} + \Omega_0\right) = R\mu M g t$$

$$v_0 - \mu g t + R\Omega_0 = \frac{\mu M g R^2}{I} t$$

$$v_0 + R\Omega_0 = \left(1 + \frac{MR^2}{I}\right)\mu g t$$

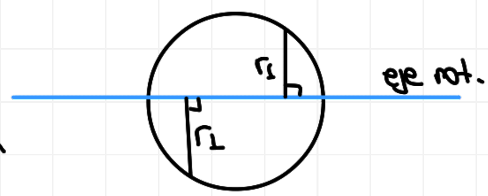
$$\boxed{t = \frac{v_0 + R\Omega_0}{\mu g}\left(1 + \frac{MR^2}{I}\right)^{-1}}$$

Si la esfera es hueca la masa se concentra en la superficie

$I = \int r_\perp^2 \, dm$ aquí $r_\perp \neq R$ son las dist. $\perp$ desde el EJE de rot. hacia cada punto del sólido. visto desde arriba:

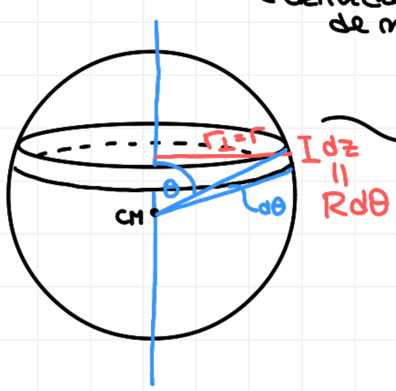
Podemos dividir la esfera en muchos anillos cilíndricos ($I_{cil} = MR^2$) de altura infinitesimal y como la distribución de masa es homogénea tenemos $M/A = \sigma = dm/dS$

densidad superficial de masa



coord. r cilíndi

área esfera: $A = 4\pi R^2$



$$dI = r_\perp^2 \, dm = r^2 \frac{M}{A} dS$$

$dS = 2\pi r \, dz$
$= 2\pi r R d\theta$
área banda cilíndrica

$$= \frac{M}{4\pi R^2} r^2 \cdot 2\pi r R d\theta$$

$$dI = \frac{M}{2R} r^3 d\theta$$

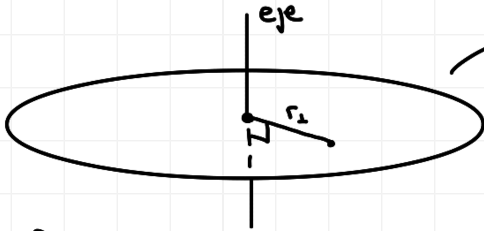
Del dibujo, $\sin\theta = r/R$

$$dI = \frac{M}{2R} R^3 \sin^3\theta \, d\theta$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \, d\theta}_{4/3}$$

$$\boxed{I = \frac{2}{3} MR^2}$$

Ahora busquemos I para la esfera maciza. Haremos lo mismo, pero en vez de discos con la masa concentrada en el borde, la tendremos distribuida en todo el volumen. Antes no calculamos la inercia de ese disco, así que busquemos I para un disco macizo de masa M y radio R:



todos los puntos del disco tienen una posición $\rho\hat{\rho}$ con $\rho = r_\perp$

densidad de masa superficial

$$I_{disco} = \int r_\perp^2\, dm \qquad \Big/ \quad \frac{M}{A} = \sigma = \frac{dm}{dS}, \quad A = \pi R^2$$

$$= \int \rho^2 \sigma\, dS \qquad \Big/ \quad dS = \rho\, d\rho\, d\theta$$

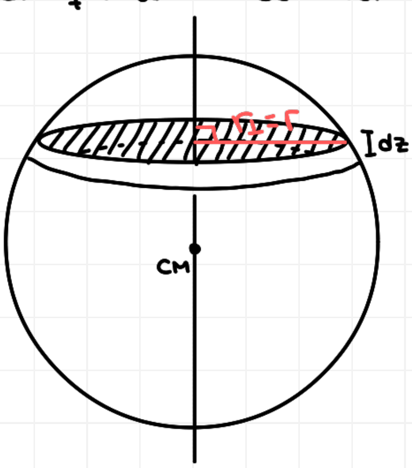
$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \rho^3\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} R^4$$

$$I_{disco} = \frac{1}{2} M R^2$$

es el mismo para un disco 3D (cilindro macizo)

Igual que en la esfera hueca, podemos separar la esfera maciza en muchos discos como el que acabo de mostrar.



Momento angular del disco:

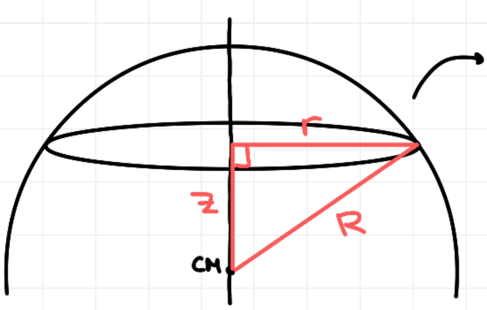
$$dI = \frac{1}{2} r^2\, dm$$
radio del disco considerado

La esfera es homogénea por lo que tiene densidad $\rho = M/V$, con $V = 4\pi R^3/3$

$$dm = \rho\, dV = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot dV = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \pi r^2\, dz$$

$$dI = \frac{1}{2} r^2 \frac{3M}{4\cancel{\pi} R^3} \cdot \cancel{\pi} r^2\, dz$$

$$dI = \frac{3M}{8R^3} r^4\, dz$$



$$r^2 = R^2 - z^2$$

$$dI = \frac{3M}{8R^3} (R^2 - z^2)^2\, dz$$

$$I = \frac{3M}{8R^3} \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2\, dz = \frac{3M}{8R^3} \cdot \frac{16R^5}{15} = \boxed{\frac{2}{5} M R^2 = I}$$

Ahora que sabemos cómo es I_{hueca} e I_{maciza}, y como sabemos que el instante en que la bola comienza a rodar sin resbalar es

$$t = \frac{V_0 + R\Omega_0}{\mu g}\left(1 + \frac{MR^2}{I}\right)^{-1} \sim \frac{1}{I}$$

tendremos que a mayor I, menor es t, por lo que la esfera maciza rodará sin resbalar primero.

$$t_{hueca} = \frac{V_0 + R\Omega_0}{\mu g} \cdot \frac{2}{5} > t_{maciza} = \frac{V_0 + R\Omega_0}{\mu g} \cdot \frac{2}{7}$$

c) Supongamos bola maciza. El instante en que comienza a RSR es

$$t^* = \frac{2}{7} \cdot \frac{V_0 + R\Omega_0}{\mu g}$$

y sabemos que $\dot{x}(t) = v_0 - \mu g t$, para $t \leq t^*$. En t^* la bola lleva una rapidez lineal de

$$\dot{x}(t^*) = v_0 - \mu g t^*$$

$$\dot{x}^* = v_0 - (v_0 + R\Omega_0) \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{7} v_0 - \frac{2}{7} R\Omega_0$$

A partir de t^*, la velocidad del CM se mantiene cte. e igual a $\dot{x}^*$.

Queremos encontrar condiciones para que la bola se detenga antes de llegar a recorrer una distancia L. Como después de t^* la bola rueda con rapidez cte., necesitaremos que esta sea 0 o menor a cero (que RSR hacia la izq.), y también necesitaremos que alcance esta rapidez cte antes de recorrer L, o sea, que deje de deslizar antes de llegar a L.

La primera condición nos dice que se debe cumplir

$$\dot{x}^* \leq 0 \longrightarrow \frac{5}{\cancel{7}} V_0 - \frac{2}{\cancel{7}} R\Omega_0 \leq 0$$

$$\boxed{V_0 \leq \frac{2}{5} R\Omega_0} \qquad (1.^a \text{ cond.})$$

y la segunda nos dice que la dist. recorrida al resbalar debe ser menor a L.

$$\dot{x} = v_0 - \mu g t \qquad / \int$$

$$\int_0^{\bar{x}} \dot{x}\, dt = v_0 \bar{t} - \frac{1}{2}\mu g \bar{t}^2 \qquad / \ \bar{t} = \frac{v_0}{\mu g}$$

$$\bar{x} = v_0 \frac{v_0}{\mu g} - \frac{1}{2}\mu g \frac{v_0^2}{(\mu g)^2}$$

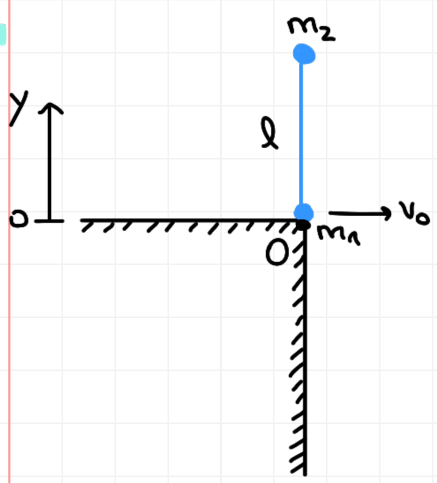
$$\bar{x} = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

donde $\bar{t}$ era el instante donde $\dot{x} = 0$ en la zona de resbalación; y necesitamos $\bar{x} < L$

$$\frac{v_0^2}{2\mu g} < L$$

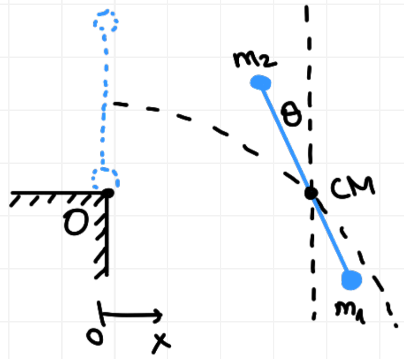
$$\boxed{v_0 < \sqrt{2\mu g L}}$$

P3



• En $t=0$ se impulsa a m_1 con $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$

A) La única fuerza actuando sobre la barra es la gravedad, así que el CM describe una parábola. Además esta actúa desde el eje de rot. (CM):



$$\vec{\tau}_{cm} = \vec{0} \times -mg\hat{z} = \vec{0}$$

y como $\dot{\vec{L}}_{cm} = \vec{\tau}_{cm}$ tenemos conservación de $\vec{L}$. Luego,

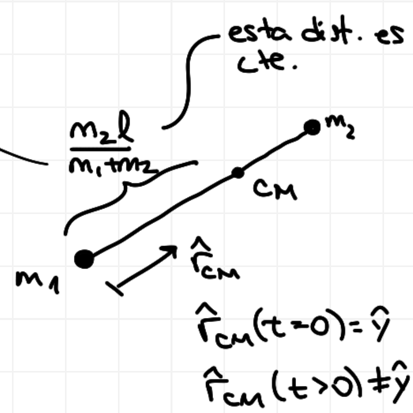
$$\vec{L}_{CM} = \vec{L}_{cm}(t=0) = \vec{L}_1(t=0) + \vec{L}_2(t=0)$$

Sabemos que $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$, y $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ tienen como origen al CM.

<u>en $t=0$:</u>

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad \Big/ \ \underbrace{\vec{r}_1 = 0\hat{y}\ ,\ \vec{r}_2 = l\,\hat{y}}_{\text{en } t=0}$$

$$= \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\hat{y}$$



$$\vec{L}_1(t=0) = m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}) \times \vec{v}_1(t=0)$$

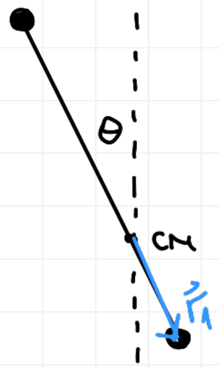
$$= m_1\left(0\hat{y} - \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\hat{y}\right) \times v_0\hat{x}$$

$$\vec{L}_1(0) = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_0 \hat{z}$$

y $\vec{v}_2(t=0) = \vec{0}$ así que $\vec{L}_2(0) = \vec{0}$ y

$$\vec{L}_{cm}(t=0) = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l v_0 \hat{z}$$

Sabemos que $\vec{L}$ se conserva, así que ahora en t arbitrario:



$$\vec{r}_1 = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\hat{r}_1 \qquad \vec{v}_1 = \cancel{\dot{r}_1\hat{r}_1} + r_1\dot{\theta}_1\hat{\theta}_1 = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\dot{\theta}_1\hat{\theta}_1$$

$$\vec{L}_1 = m_1\left(\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\right)^2\dot{\theta}\,\hat{r}_1\times\hat{\theta}_1 = m_1\left(\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\right)^2\dot{\theta}_1\hat{z}_1$$

$$= m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 l^2\dot{\theta}\hat{z}$$

$$\hat{r}_1 = -\hat{r}_2$$

Para m_2, $\vec{r}_2 = \left(l - \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\right)\hat{r}_2 = -\frac{m_1 l}{m_1+m_2}\hat{r}_1$ y

$$\vec{v}_2 = \left(l - \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\right)\dot{\theta}_2\hat{\theta}_2 \qquad m_2 - (m_1+m_2)$$

$$= -\frac{m_1}{m_1+m_2}l\dot{\theta}_1\hat{\theta}_1$$

$$\vec{L}_2 = m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 l^2\dot{\theta}\hat{z}$$

$$\vec{L}_{CM} = m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 l^2\dot{\theta}\hat{z} + m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 l^2\dot{\theta}\hat{z}$$

Como se conserva, $\vec{L}_{CM} = \vec{L}_{CM}(t=0)$

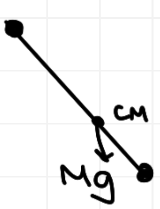
$$m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 l^2\dot{\theta} + m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 l^2\dot{\theta} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}l v_0$$

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}l\dot{\theta} + \frac{m_1}{m_1+m_2}l\dot{\theta} = v_0$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{l} \qquad / \int dt$$

$$\boxed{\theta = \frac{v_0}{l}t}$$

B) Como la única fuerza es el peso:



$$M\ddot{y}_{CM} = -Mg$$

$$\ddot{y}_{CM} = -g \longrightarrow \boxed{\dot{y}_{CM} = -gt}$$