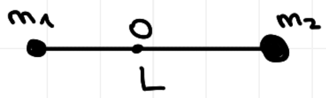
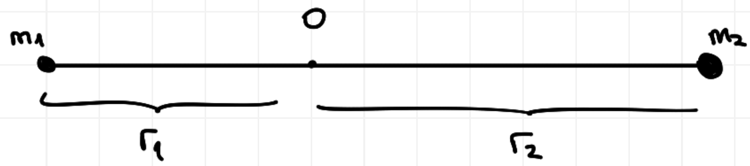
P1



• Determinar T
• $\vec{F}_G$

A) Consideremos que O está ubicado en el centro de masas de modo que m_1 y m_2 describen circ. en torno a O.



En primer lugar, $r_1 + r_2 = L$. (1)

La definición de CM es:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

y según nuestro sist. $\vec{R}_{CM}=0$, $\vec{r}_1 = -r_1\hat{x}$ y $\vec{r}_2 = r_2\hat{x}$; luego

$$0 = \frac{-m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1+m_2}$$

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_2} r_1 \qquad (2)$$

$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$ (fzas centrales)

$\cancel{m_1 r_1}\omega_1 = \cancel{m_2 r_2}\omega_2$

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Insertado (2) en (1)

$$r_1 + \frac{m_1}{m_2} r_1 = L$$

$$r_1 \cdot \frac{m_1+m_2}{m_2} L$$

$$\boxed{r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} L \longrightarrow r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} L}$$

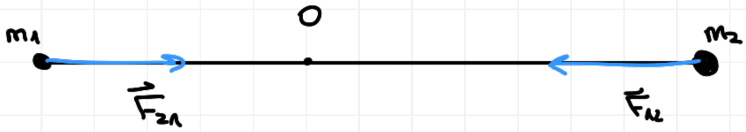
El mov. es plano, por lo que podemos describir el mov. en polares

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

m_1 y m_2, como describen circunferencias, cumplen $\dot{r}_1 = \dot{r}_2 = 0$, y rotan a velocidad angular cte. $\ddot{\theta} = 0$. A $\hat{r}$

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} \qquad \omega = \dot{\theta} \ \text{cte}$$

La fuerza neta sobre el masa es la gravitatoria



$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{L^2}\hat{r}$$

ec. 1 $\longrightarrow$ $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{21}$

$$-\cancel{m_1}r_1\omega_1^2 = -\frac{G\cancel{m_1}m_2}{L^2} \qquad \omega_1=\omega_2=\omega$$

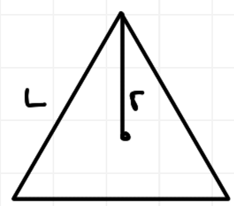
$$\omega^2 = \frac{Gm_2}{r_1L^2}$$

$$= \frac{G\cancel{m_2}}{L^2}\cdot\frac{m_1+m_2}{\cancel{m_2}L}$$

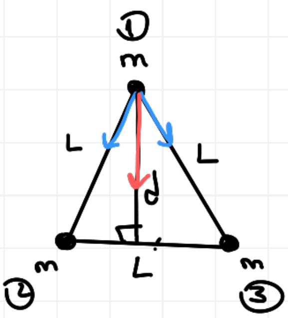
$$\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{L^3}$$

Por último, $T = 2\pi/\omega$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{G(m_1+m_2)}}}$$



B)



$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r}$ con $r = \frac{L}{\sqrt{3}} \longrightarrow F_c = \frac{mL\omega^2}{\sqrt{3}}$

$$\vec{F}_{21} = \frac{-Gm^2}{L^2}\hat{r}_{21}$$

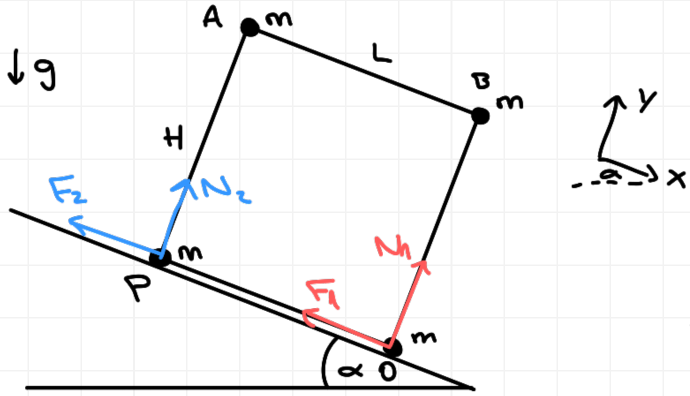
$$\hookrightarrow \vec{F}_{21}\cdot\hat{r} = -\frac{Gm^2}{L^2}\cos 30^\circ = -\frac{Gm^2}{L^2}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_c = 2F_G$$

$$\frac{\cancel{m}L\omega^2}{\sqrt{3}} = \frac{Gm^{\cancel{2}}}{L^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2$$

$$\omega^2 = 3\frac{Gm}{L^3} \longrightarrow \boxed{T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{L^3}{3Gm}}}$$

P2



$$V = \frac{16\pi^2}{3\pi} \qquad \frac{8\pi^2}{3\pi}$$

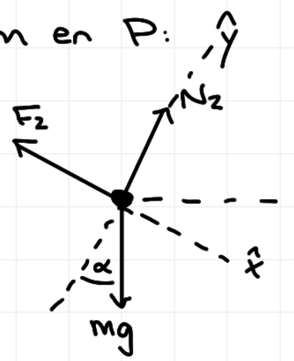
$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\pi^2 h^2 + \ell^2 \pi^2 + \frac{1}{2} h^2\right)$$

$$\pi \times \pi \times 2$$

A) · roce estático

· determinar máx H para que se mantenga estático

DCL m en P:



$$\vec{N}_2 = N_2 \hat{y}$$
$$\vec{F}_2 = -\mu N_2 \hat{x}$$
$$m\vec{g} = mg(\sin\alpha\,\hat{x} - \cos\alpha\,\hat{y})$$

Para las masas de arriba solo hay $m\vec{g}$.

El torque según O es

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_A + \vec{\tau}_B$$

$$= -L\hat{x} \times N_2\hat{y} \overset{0}{\cancel{- L\hat{x} \times -\mu N_2 \hat{x}}} - L\hat{x} \times mg(\overset{0}{\cancel{\sin\alpha\,\hat{x}}} - \cos\alpha\,\hat{y})$$

$$+ (-L\hat{x} + H\hat{y}) \times mg(\sin\alpha\,\hat{x} - \cos\alpha\,\hat{y})$$

$$+ H\hat{y} \times mg(\sin\alpha\,\hat{x} - \cos\alpha\,\hat{y})$$

$$\vec{\tau}_O = -LN_2\hat{z} + Lmg\cos\alpha\,\hat{z} + Lmg\cos\alpha\,\hat{z} - Hmg\sin\alpha\,\hat{z} - Hmg\sin\alpha\,\hat{z}$$

Queremos que no rote $\rightarrow \vec{\tau} = 0$

$$0 = -LN_2 + 2Lmg\cos\alpha - 2Hmg\sin\alpha$$

$$N_2 = 2mg\left(\cos\alpha - \frac{H}{L}\sin\alpha\right)$$

necesitamos $N_2 > 0$, así que

$$\cos\alpha - \frac{H}{L}\sin\alpha > 0$$

$$L\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > H$$

$$\boxed{H < L\cot\alpha}$$

B) • altura H tal que en O y P siempre haya contacto
• hay deslizamiento

Solo hay una dirección de mov., y las 4 masas se mueven como una (mov. CM)

$$\boxed{\begin{aligned} 4m\ddot{x} &= 4mg\sin\alpha - \mu N_1 - \mu N_2 \\ 0 &= -4mg\cos\alpha + N_1 + N_2 \end{aligned}}$$

También, el sist. solo desliza $\rightarrow \vec{\tau} = 0$. Consideremos el origen como el punto medio del sist (CM)

$$\vec{\tau}_{CM} = \left(\frac{L}{2}\hat{x} - \frac{H}{2}\hat{y}\right)\times\left(N_1\hat{y} - \mu N_1\hat{x} + mg(\sin\alpha\hat{x} - \cos\alpha\hat{y})\right)$$
$$+ \left(-\frac{L}{2}\hat{x} - \frac{H}{2}\hat{y}\right)\times\left(N_2\hat{y} - \mu N_2\hat{x} + mg(\sin\alpha\hat{x} - \cos\alpha\hat{y})\right)$$
$$+ \left(\frac{L}{2}\hat{x} + \frac{H}{2}\hat{y}\right)\times mg(\sin\alpha\hat{x} - \cos\alpha\hat{y})$$
$$+ \left(-\frac{L}{2}\hat{x} + \frac{H}{2}\hat{y}\right)\times mg(\sin\alpha\hat{x} - \cos\alpha\hat{y})$$

$$= \frac{LN_1}{2}\hat{z} - \cancel{\frac{L}{2}mg\cos\alpha\hat{z}} - \frac{H}{2}\mu N_1\hat{z} + \cancel{\frac{H}{2}mg\sin\alpha\hat{z}}$$
$$- \frac{LN_2}{2}\hat{z} + \cancel{\frac{L}{2}mg\cos\alpha\hat{z}} - \frac{H}{2}\mu N_2\hat{z} + \cancel{\frac{H}{2}mg\sin\alpha\hat{z}}$$
$$- \cancel{\frac{L}{2}mg\cos\alpha\hat{z}} - \cancel{\frac{H}{2}mg\sin\alpha\hat{z}}$$
$$+ \cancel{\frac{L}{2}mg\cos\alpha\hat{z}} - \cancel{\frac{H}{2}mg\sin\alpha\hat{z}}$$

$$0 = \frac{L}{2}(N_1 - N_2) - \frac{H}{2}\mu(N_1 + N_2)$$

$$L(N_1 - N_2) = \mu H(N_1 + N_2)$$

$$LN_1 - LN_2 = \mu H N_1 + \mu H N_2$$

$$N_1 (L - \mu H) = N_2 (L + \mu H)$$

$$\boxed{N_1 = N_2 \cdot \frac{L + \mu H}{L - \mu H}}$$

Reemplazado en la ec. de mov en $\hat{y}$:

$$4mg\cos\alpha = N_1 + N_2$$

$$= N_2 \frac{L+\mu H}{L-\mu H} + N_2$$

$$= N_2 \left(1 + \frac{L+\mu H}{L-\mu H}\right)$$

$$4mg\cos\alpha = N_2 \frac{2L}{L-\mu H}$$

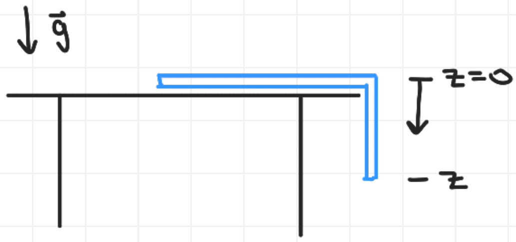
$$N_2 = \frac{2mg\cos\alpha}{L}(L - \mu H)$$

Queremos $N_1, N_2 > 0$

$$L - \mu H > 0$$

$$\boxed{H < \frac{L}{\mu}}$$

P3



- masa M, largo L
- la cuerda tarda τ en caer completamente

Para encontrar lo que se pide se puede usar conservación de energía, y para esto se necesitan expresiones para la energía cinética y potencial.

La cuerda (ideal) es un sistema continuo, pero puede pensarse como un sistema de $N \gg 1$ partículas (constituyentes de la cuerda). También, como es inextensible, cada constituyente de la cuerda debe moverse con la misma rapidez: v_0 hasta antes de comenzar a caer y $\dot{z}$ cuando está cayendo. Luego,

$$K_{inicial} = \sum_{i=1}^{N} K_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_0^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{\text{masa cuerda}} = \frac{1}{2} M v_0^2$$

$$K_{final} = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 \quad \rightarrow \quad \text{mismo razonamiento} \qquad (1)$$

Por otro lado, el cálculo de la energía potencial debe dividirse entre las partes sobre la mesa y la parte que está cayendo. La única contribución a la potencial es la gravitatoria, e inicialmente está completamente sobre la mesa. Además, se define $z=0$ a la altura de la mesa, por lo que

$$U_{inicial} = 0 \qquad (2)$$

$$U_{final} = -\sum_{i=1}^{N} m_i g z_i = -g \sum_{i=1}^{N} m_i z_i \qquad (3)$$

Como la cuerda tiene densidad conocida $\lambda = M/L$, y es uniforme, cada constituyente se puede pensar como una pequeña cuerda de largo Δz_i y masa m_i tal que $\lambda = m_i/\Delta z_i$. Luego, con el valor λ conocido, $m_i = M\Delta z_i/L$. Con esto, (3) se anota

$$U_{final} = -g \sum_{i=1}^{N} \frac{M}{L} z_i \Delta z_i = -\frac{Mg}{L} \sum_{i=1}^{N} z_i \Delta z_i$$

Ahora, como $N \gg 1$, se puede aproximar la suma a una integral, pero solo nos interesan los constituyentes que están ya en caída, pues el resto tienen $z_i = 0$. Sigue que

$$U_{final} = -\frac{Mg}{L} \int_0^z z' \, dz' = -\frac{Mgz^2}{2L} \qquad (4)$$

Juntando (1), (2) y (4), la conservación de energía permite escribir que

$$E_{inicial} = E_{final}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{M}v_0^2 + 0 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}\dot{z}^2 - \frac{\cancel{M}gz^2}{\cancel{2}L}$$

$$\dot{z}^2 = v_0^2 + \frac{g}{L}z^2$$

$$\dot{z} = \sqrt{v_0^2 + \frac{g}{L}z^2} \qquad (5)$$

Sabemos que la cuerda tarda un tiempo τ en caer completamente, luego

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{v_0^2 + \frac{g}{L}z^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{v_0^2 + \frac{g}{L}z^2}}\frac{dz}{dt} = 1 \qquad \Big/ \int_0^\tau dt$$

$$\int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + \frac{g}{L}z^2}}\underbrace{\frac{dz}{dt}dt}_{dz} = \underbrace{\int_0^\tau dt}_{\tau} \qquad \Big/ \int_0^\tau dt \rightarrow \int_0^L dz$$

$$\int_0^L \frac{dz}{v_0\sqrt{1 + \frac{g}{v_0^2 L}z^2}} = \tau \qquad \Big/ \tan\theta = \sqrt{\frac{g}{v_0^2 L}}\, z$$

$$dz = \sqrt{\frac{v_0^2 L}{g}}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{\theta(L)} \sqrt{\frac{v_0^2 L}{g}}\frac{\sec^2\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\, d\theta = v_0\tau \qquad \Big/ 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\int_0^{\theta(L)} \sec\theta\, d\theta = \sqrt{\frac{g}{\cancel{v_0^2}L}}\cancel{v_0}\tau = \tau\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\ln(\sec\theta(L) + \tan\theta(L)) - \cancel{\ln 1}^{0} = \tau\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\sec\theta(L) + \tan\theta(L) = e^{\tau\sqrt{g/L}} \qquad \Big/ \theta = \arctan\left(\sqrt{\frac{g}{v_0^2 L}}\, z\right)$$

$$\sec\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{g}{v_0^2 L}}\, L\right)\right) + \sqrt{\frac{g}{v_0^2 L}}\, L = e^{\tau\sqrt{g/L}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{g}{v_0^2 L}L^2} + \sqrt{\frac{gL}{v_0^2}} = e^{\tau\sqrt{g/L}}$$

$$\sqrt{v_0^2+gL}+\sqrt{gL}=v_0 e^{\tau\sqrt{g/L}}$$

$$v_0^2+\cancel{gL}=v_0^2 e^{2\tau\sqrt{g/L}}+\cancel{gL}-2v_0 e^{\tau\sqrt{g/L}}\sqrt{gL}$$

$$v_0^{\cancel{2}}\left(1-e^{2\tau\sqrt{g/L}}\right)=-2\cancel{v_0}e^{\tau\sqrt{g/L}}\sqrt{gL}$$

$$v_0=\frac{2e^{\tau\sqrt{g/L}}\sqrt{gL}}{e^{2\tau\sqrt{g/L}}-1}$$

$$v_0=\frac{2\sqrt{gL}}{e^{\tau\sqrt{g/L}}-e^{-\tau\sqrt{g/L}}}$$

$$\boxed{v_0=\frac{\sqrt{gL}}{\sinh\left(\tau\sqrt{g/L}\right)}}$$