P1 $\cdot\ u'' + u = -\dfrac{m}{L^2u^2}F(u)$ $\cdot$ c.i.: $\dot{r}(\theta=0)=0$

$r(\theta=0)=R$

$\cdot\ F(r) = -\dfrac{C}{r^3},\quad C>0$ $\cdot\ L^2 > mC$

Queremos $r(\theta)$. Podemos usar el cambio de variable $r = 1/u$ para escribir la fuerza F en función de u:

$$F(u) = -Cu^3$$

y reemplazamos en la ec. de Binet:

$$u'' + u = \frac{mC}{L^2}u$$

$$u'' + \underbrace{\left(1 - \frac{mC}{L^2}\right)}_{\Omega^2}u = 0$$

$$u'' + \Omega u = 0$$

$$u(\theta) = A\cos\Omega\theta + B\sin\Omega\theta$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{1}{A\cos\Omega\theta + B\sin\Omega\theta}}$$

Sabemos que $r(0)=R$:

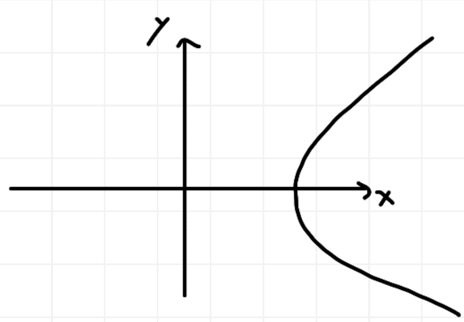
$$R = \frac{1}{A+0} \longrightarrow A = \frac{1}{R}$$

y que $\dot{r}(\theta=0)=0$. Busquemos $\dot{r}$:

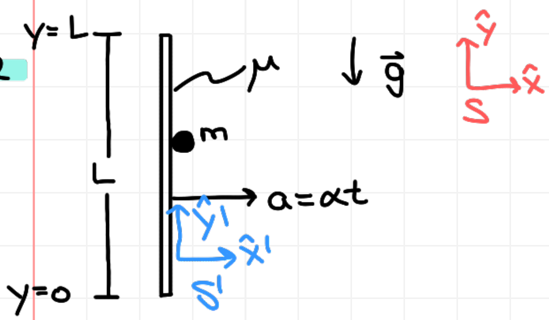
$$\dot{r} = r'\dot{\theta} = -\frac{\Omega(-A\sin\Omega\theta + B\cos\Omega\theta)}{(A\cos\Omega\theta + B\sin\Omega\theta)^2}\dot{\theta}$$

$$0 = -\frac{\Omega(0+B)\dot{\theta}_0}{(A+0)^2} \longrightarrow B = 0$$

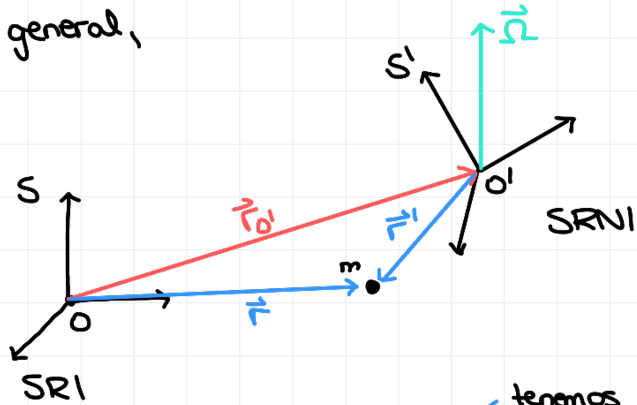
$$\boxed{r(\theta) = \frac{R}{\cos\sqrt{1-\frac{mC}{L^2}}\,\theta}}$$



P2



En general,



tenemos que escribir $\vec{r}\,'$ en la base usada en S, o $\vec{r}$ y $\vec{r}_{O'}$ en la de S'

y tenemos que $\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$, $\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}\,' + \vec{\Omega} \times \vec{r}\,'$ y

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\vec{a}_{O'}}_{\text{traslacional}} + \vec{a}\,' + \underbrace{\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,'}_{\text{transversal}} + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{v}\,'}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,')}_{\text{centrífuga}}}$$

<u>fuerzas ficticias o no inerciales</u>:

$$\vec{F}_{trasl} = -m\vec{a}_{O'}$$

$$\vec{F}_{transv} = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,'$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}\,'$$

$$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,')$$

Para el problema, en el SRI S vemos que la placa se mueve con aceleración

$$\vec{a}_{O'} = \alpha t \hat{x}$$

y en el SRNI tenemos a un observador sobre la placa, y aquí la masa experimenta las fuerzas:

$m\vec{g} = -mg\hat{y}'$ $\quad\vec{N} = N\hat{x}'$ $\quad\vec{F}_R = \mu N \hat{y}'$

además, su movimiento es solo en el eje $\hat{y}'$ (en el sist. S'), por lo que

$$\vec{a}' = \ddot{y}\hat{y}'$$

La aceleración $\vec{a}$ es, entonces,

$$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}'$$

y la relación entre las bases $\{\hat{x},\hat{y}\}$ y $\{\hat{x}',\hat{y}'\}$ es $\hat{x}=\hat{x}'$, $\hat{y}=\hat{y}'$. Así

$$\vec{a} = \alpha t\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}$$

y escribiendo la 2ª ley de Newton

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\alpha t\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} = N\hat{x} + \mu N\hat{y} - mg\hat{y}$$

- $\hat{x}$: $\quad m\alpha t = N$
- $\hat{y}$: $\quad m\ddot{y} = \mu N - mg$

$$m\ddot{y} = \mu m\alpha t - mg$$

$$\boxed{\ddot{y} = \mu\alpha t - g}$$

Sabemos que parte del reposo y buscamos $\mu_{mín}$ para que la partícula se detenga c/r a la placa. Integrando:

$$\int_0^t \ddot{y}\,dt = \int_0^t (\mu\alpha t - g)\,dt \qquad / \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$\int d\dot{y} = \frac{\mu\alpha}{2}t^2 - gt$$

$$\dot{y} - \cancel{\dot{y}_0} = \frac{\mu\alpha}{2}t^2 - gt$$

$$\dot{y} = \frac{\mu\alpha}{2}t^2 - gt$$

Como queremos que se detenga, $\dot{y}=0$

$$0 = \frac{\mu\alpha}{2}t^2 - gt \longrightarrow t_0 = 0 \quad o \quad \boxed{t^* = \frac{2g}{\mu\alpha}}$$

Integramos de nuevo:

$$y - y_0 = \frac{\mu\alpha}{6} t^3 - \frac{g}{2} t^2$$

y sabemos que parte desde el punto superior de la placa $(y_0 = L)$:

$$y = L + \frac{\mu\alpha}{6} t^3 - \frac{g}{2} t^2$$

Como buscamos el mínimo μ, imponemos que el punto donde se detiene es justo cuando llega al borde inferior de la placa, o sea que alcanza $y=0$ en $t=t^*$

$$0 = L + \frac{1}{6}\mu\alpha\left(\frac{2g}{\mu\alpha}\right)^3 - \frac{g}{2}\left(\frac{2g}{\mu\alpha}\right)^2$$

$$0 = L + \frac{1}{6}\mu\alpha \cdot \frac{8g^3}{(\mu\alpha)^3} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{4g^2}{(\mu\alpha)^2}$$

$$0 = L + \frac{4g^3}{3\alpha^2} \cdot \frac{1}{\mu^2} - \frac{2g^3}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\mu^2} \qquad / \cdot \mu^2$$

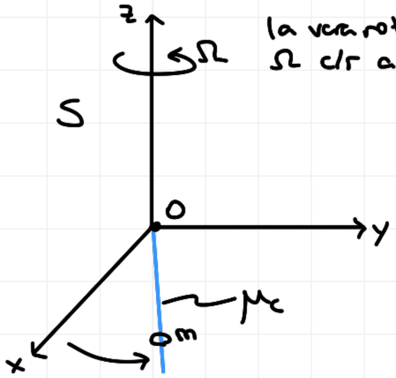
$$0 = \mu^2 L + \frac{2g^3}{\alpha^2}\left(\frac{2}{3} - 1\right)$$

$$0 = \mu^2 L - \frac{2g^3}{3\alpha^2}$$

$$\frac{2g^3}{3\alpha^2} = \mu^2 L$$

$$\boxed{\mu = \sqrt{\frac{2g^3}{3\alpha^2 L}}}$$

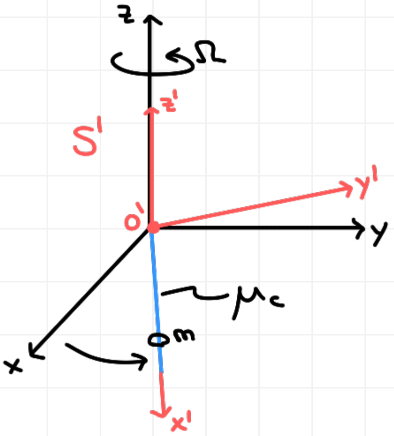
P3



la vara rota con Ω c/r a O

- No hay gravedad
- Hay roce μ_c entre la argolla y la vara.
- Ω cte.

A)



Notamos que $\hat{z} = \hat{z}'$.

B) · Fuerzas ficticias

$$\vec{F}_{trasl} = -m\vec{a}_{o'} = 0 \qquad \vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'$$

$$\vec{F}_{transv} = -m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = 0 \qquad \vec{F}_{cent} = -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$$

Trabajaremos en la base $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$. Necesitamos $\vec{\Omega}$, $\vec{r}'$ y $\vec{v}'$:

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{z} = \Omega\hat{z}'$$

$$\vec{r}' = \rho\hat{x}' \longrightarrow \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{\rho}\hat{x}'$$

$$\vec{\Omega}\times\vec{r}' = \Omega\rho\,\hat{z}'\times\hat{x}' = \Omega\rho\hat{y}'$$

$$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = \Omega^2\rho\,\hat{z}'\times\hat{y}' = -\Omega^2\rho\hat{x}'$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{F}_{centr} = m\Omega^2\rho\hat{x}'}$$

$$\vec{\Omega}\times\vec{v}' = \Omega\dot{\rho}\,\hat{z}'\times\hat{x}' = \Omega\dot{\rho}\hat{y}'$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{F}_{cor} = -2m\Omega\dot{\rho}\hat{y}'}$$

c) Para encontrar la ec. de mov. en S' notamos que

en S: $m\vec{a} = \vec{F}_{reales}$

en S': $m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} + \vec{F}_{ficticias}$

Tenemos mov. solo en $\hat{x}'$, por lo que $\vec{a}' = \ddot{\rho}\hat{x}'$, y las fzas. reales son

$$\vec{N} = N\hat{y}' \qquad \vec{F}_R = -\mu N\hat{x}'$$

$$\boxed{m\ddot{\rho}\hat{x}' = -\mu N\hat{x}' + N\hat{y}' + m\Omega^2\rho\hat{x}' - 2m\Omega\dot{\rho}\hat{y}'}$$

- $\hat{x}'$: $m\ddot{\rho} = -\mu N + m\Omega^2\rho$
- $\hat{y}'$: $0 = N - 2m\Omega\dot{\rho} \longrightarrow \boxed{N(\dot{\rho}) = 2m\Omega\dot{\rho}}$

D) Para que la argolla esté fija c/r a la vara $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, con lo que

$$N = 0 \longrightarrow F_R = -\mu N = 0$$

y de la ec. en $\hat{x}'$:

$$0 = 0 + m\Omega^2\rho \longrightarrow \boxed{\rho = 0}$$

E) Suponemos $\rho(t=0) = 0$ y $\dot{\rho}(t=0) = v_0$. De las ec. de mov.:

$$m\ddot{\rho} = -\mu N + m\Omega^2\rho$$

$$m\ddot{\rho} = -\mu \cdot 2m\Omega\dot{\rho} + m\Omega^2\rho$$

$$\ddot{\rho} + 2\mu\Omega\dot{\rho} - \Omega^2\rho = 0$$

oscilador amortiguado

— edo lineal $\rightarrow$ ansatz $\rho = Ae^{\lambda t}$

$$\cancel{Ae^{\lambda t}}\lambda^2 + 2\mu\Omega\cancel{Ae^{\lambda t}}\lambda - \Omega^2 \cdot \cancel{Ae^{\lambda t}} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\mu\Omega\lambda - \Omega^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2\mu\Omega \pm \sqrt{4\mu^2\Omega^2 + 4\Omega^2}}{2}$$

$$\lambda = -\mu\Omega \pm \Omega\sqrt{\mu^2 + 1}$$

$$\rho(t) = e^{-\mu\Omega t}\left(A e^{\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t} + B e^{-\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t}\right)$$

$$\rho(t=0) = 0 = A + B \longrightarrow B = -A$$

$$\rho(t) = A e^{-\mu\Omega t}\left(e^{\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t} - e^{-\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t}\right)$$

$$\dot{\rho}(t) = -\mu\Omega A e^{-\mu\Omega t}\left(e^{\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t} - e^{-\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t}\right)$$

$$+ A e^{-\mu\Omega t}\cdot \Omega\sqrt{\mu^2+1}\left(e^{\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t} + e^{-\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t}\right)$$

$$\dot{\rho}(t=0) = v_0 = \cancel{\mu\Omega A(1-1)} + A\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,(1+1)$$

$$v_0 = 2A\Omega\sqrt{\mu^2+1}$$

$$A = \frac{v_0}{2\Omega\sqrt{\mu^2+1}} = -B$$

$$\boxed{\rho(t) = \frac{v_0 e^{-\mu\Omega t}}{2\Omega\sqrt{\mu^2+1}}\left(e^{\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t} - e^{-\Omega\sqrt{\mu^2+1}\,t}\right)}$$