Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001-3 Mecánica

Auxiliar 11: Fuerzas centrales

Profesor: César Fuentes
Auxiliares: Daniel Lobos
Álvaro Flores
Ayudante: Catalina Vargas

24 de octubre de 2022

Problema 1

Una partícula de masa m se mueve en un potencial de la forma $U(r) = Ar^n$, teniendo un momento angular L conocido.

a) Encontrar la ecuación de movimiento radial.

b) Determinar el radio R para tener órbitas circulares. ¿Cuál es el radio de órbitas circulares en el caso gravitatorio?

c) Calcular el valor máximo del potencial efectivo en el caso general y en el gravitatorio.

d) Calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones en los casos gravitatorio y elástico.

a) Para encontrar la ecuación de movimiento radial, identificamos que la partícula está sujeta solo a un potencial con dependencia radial, lo que nos dice que el movimiento de la partícula debe ser en un plano, puesto que solo actúa sobre ella una fuerza central. Luego, la aceleración de la partícula puede ser escrita en coordenadas polares como

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{1}$$

Por otro lado, la fuerza neta que actúa sobre la partícula es debida solo al potencial U, por lo que es una fuerza central:

$$\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}} \tag{2}$$

y como el hecho de que sea central implica que es conservativa, $F(r) = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}r$. Así, la ecuación de movimiento vectorial de la partícula es

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\hat{\mathbf{r}}. \tag{3}$$

Proyectando en los ejes $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\begin{aligned} \cdot\hat{\mathbf{r}}: &\qquad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -U'(r) \\ \cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}: &\qquad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

De la segunda ecuación observamos una cantidad conservada, la cual corresponde por definición al momento angular L, es decir,

$$L \equiv mr^2\dot{\theta} \quad \text{constante} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}. \tag{5}$$

Insertando esto en la proyección radial de la ecuación de movimiento vectorial y reemplazando el potencial por su defición:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 &= -\left(Ar^n\right)' \\ m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} &= -Anr^{n-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

b) Para encontrar el radio de órbitas circulares imponemos que $\dot{r} = 0$, es decir, la distancia radial no varía (definición de circunferencia), por lo que $\ddot{r} = 0$. Reemplazando esto en la ecuación de movimiento radial, se obtiene que

$$\begin{aligned} -\frac{L^2}{mR^3} &= -AnR^{n-1} \\ \frac{L^2}{mAn} &= R^{n+2} \\ R &= \left(\frac{L^2}{mAn}\right)^{1/(n+2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

El potencial gravitatorio tiene la forma

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, \tag{8}$$

con G la constante de gravitación universal y M la masa del cuerpo que se está orbitando. Con esto, $A = -GMm$ y $n = -1$, de modo que

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{L^2}{m(-GM)(-1)}\right)^{1/(-1+2)} \\ R &= \frac{L^2}{GMm^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

También, si se considera el momento angular por unidad de masa $h = L/m$, el radio de órbitas circulares en el caso de un potencial gravitatorio es

$$R = \frac{h^2}{GM} \tag{10}$$

y deja de depender de la masa del cuerpo orbitante.

c) Para encontrar el potencial efectivo podemos escribir la energía total de la partícula en coordenadas polares. La energía cinética incluye a la rapidez al cuadrado, y la velocidad en polares es

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{11}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + U \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + Ar^n \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + Ar^n \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + Ar^n \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + Ar^n}_{U_{\text{ef}}(r)} \end{aligned} \tag{12}$$

Ahora, para encontrar el máximo o mínimo de este potencial basta derivar e igualar a cero, para así encontrar el radio $r_{\text{máx}}$ al cual el potencial efectivo se maximiza o minimiza, y luego

reemplazar este valor en la expresión original. Derivando e igualando a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{ef}}}{\mathrm{d}r} &= \frac{L^2}{2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r^2} + Anr^{n-1}\\ 0 &= -\frac{L^2}{2m}\frac{2}{r_*^3} + Anr_*^{n-1} \qquad (13)\\ \frac{L^2}{mr_*^3} &= Anr_*^{n-1}\\ \frac{L^2}{mAn} &= r_*^{n+2}\\ r_* &= \left(\frac{L^2}{mAn}\right)^{1/(n+2)}, \qquad (14)\end{aligned}$$

es decir, el radio donde se optimiza el potencial efectivo es el mismo de órbitas circulares. Luego, el potencial efectivo máximo o mínimo es:

$$U_* = U_{\mathrm{ef}}(r_*) = \frac{L^2}{2mr_*^2} + Ar_*^n; \qquad (15)$$

para el caso gravitatorio, nuevamente $A = -GMm$ y $n = -1$, con lo cual recuperamos el radio R de la parte anterior y así

$$\begin{aligned}U_* &= \frac{L^2}{2m}\left(\frac{L^2}{GMm^2}\right)^{-2} + (-GMm)\left(\frac{L^2}{GMm^2}\right)^{-1}\\ &= \frac{L^2}{2m}\frac{G^2M^2m^4}{L^4} - GMm\frac{GMm^2}{L^2} \qquad (16)\\ &= -\frac{1}{2}m\left(\frac{GMm}{L}\right)^2. \qquad (17)\end{aligned}$$

d) Para puntos de equilibrio estable, la definición de frecuencia de pequeñas oscilaciones establece que

$$\omega^2 = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2U(r_{\mathrm{eq}})}{\mathrm{d}r^2}, \qquad (18)$$

donde los r_{eq} se encuentran optimizando el potencial, y esto ya lo hicimos, los posibles puntos de equilibrio estables corresponden a los radios de órbitas circulares R (o r_*). Si derivamos dos veces el potencial efectivo, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2U_{\mathrm{ef}}}{\mathrm{d}r^2} &= -\frac{L^2}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r^3} + An(n-1)r^{n-2}\\ &= \frac{3L^2}{mr^4} + An(n-1)r^{n-2}\\ &= \frac{1}{r^4}\left(\frac{3L^2}{m} + An(n-1)r^{n+2}\right) \qquad (19)\end{aligned}$$

y podemos reemplazar la expresión de los radios de órbitas circulares, para obtener así

$$\begin{aligned}U''(r_{\mathrm{eq}}) &= \left(\frac{L^2}{mAn}\right)^{-4/(n+2)}\left[\frac{3L^2}{m} + An(n-1)\left(\frac{L^2}{mAn}\right)\right]\\ &= \underbrace{\left(\frac{L^2}{mAn}\right)^{-4/(n+2)}}_{1/R^4}\frac{L^2(n+2)}{m} \qquad (20)\end{aligned}$$

y lo único que podría hacer negativa a esta expresión es que $n+2 < 0$, por lo que en los R donde se tienen equilibrios estables son aquellos donde $n > -2$. El caso gravitatorio corresponde a

$n = -1$, y la frecuencia de pequeñas oscilaciones es

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1}{m}\frac{1}{R_{\text{grav}}^4}\frac{L^2}{m} \\ &= \frac{L^2}{m^2}\left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^4 \\ \omega &= \frac{L}{m}\frac{G^2M^2m^4}{L^4} \qquad (21) \\ &= \frac{G^2M^2m^3}{L^3}. \qquad (22)\end{aligned}$$

Por otro lado, el caso elástico corresponde a $A = k/2$ y $n = 2$, de modo que

$$\begin{aligned}R_{\text{el}} &= \left(\frac{L^2}{2mk/2}\right)^{1/4} \\ R_{\text{el}}^4 &= \frac{L^2}{mk} \qquad (23)\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1}{m}\frac{1}{R_{\text{el}}^4}\frac{L^2}{m} \\ &= \frac{L^2}{m^2}\frac{mk}{L^2} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (24)\end{aligned}$$

el cual es el resultado usual.