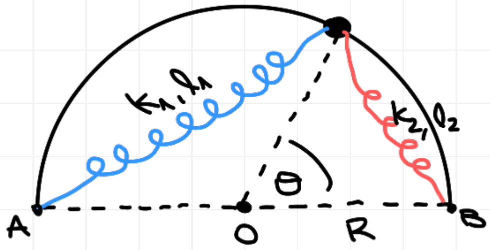
P1



- $k_1 = k, \quad l_1 = 0$
- $k_2 = 2k, \quad l_2 = R/2$

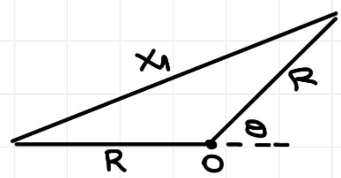
A) • Puntos de eq. (puntos donde $\vec{F}_{neta} = 0$)

Como solo hay resortes $\vec{F}_{neta} = -\nabla U_{el} \longrightarrow \nabla U_{el} = 0$ entrega ptos. de eq.

En este caso $U = U_1 + U_2$

$$\boxed{U_1 = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - l_1)^2}$$

por teo. coseno:



$$x_1^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(\pi - \theta) \qquad (\cos \pi - \theta = -\cos\theta)$$
$$= 2R^2 (1 + \cos\theta)$$

es conveniente usar que $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$:

$$x_1^2 = 2R^2 \cdot 2\cos^2\theta/2$$

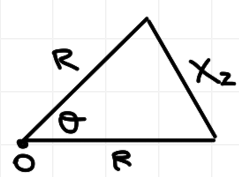
$$\boxed{x_1 = 2R\cos\theta/2}$$

$$U_1 = \frac{k}{2} (2R\cos\theta/2 - 0)^2$$

$$\boxed{U_1 = 2kR^2 \cos^2\theta/2}$$

$$\boxed{U_2 = \frac{1}{2} k_2 (x_2 - l_2)^2}$$

por teo. coseno:



$$x_2^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta$$
$$= 2R^2(1 - \cos\theta)$$

es conveniente usar que $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$:

$$x_2^2 = 2R^2 \cdot 2\sin^2\theta/2$$

$$\boxed{x_2 = 2R\sin\theta/2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\cdot 2k\left(2R\sin\theta/2 - R/2\right)^2$$

$$= k\left(4R^2\sin^2\theta/2 - 2R^2\sin\theta/2 + R^2/4\right)$$

$$\boxed{U_2 = kR^2\left(4\sin^2\theta/2 - 2\sin\theta/2 + 1/4\right)}$$

Juntando todo:

$$U = 2kR^2\cos^2\theta/2 + kR^2\left(4\sin^2\theta/2 - 2\sin\theta/2 + 1/4\right)$$

$$= kR^2\left(2\cos^2\theta/2 + 4\sin^2\theta/2 - 2\sin\theta/2 + 1/4\right)$$

$$= kR^2\left(2\cos^2\theta/2 + 2\sin^2\theta/2 + 2\sin^2\theta/2 - 2\sin\theta/2 + 1/4\right)$$

$$= kR^2\left(2 + 1/4 + 2\sin^2\theta/2 - 2\sin\theta/2\right)$$

$$\boxed{U = kR^2\left[\frac{9}{4} + 2\sin\theta/2\left(\sin\theta/2 - 1\right)\right]}$$

Como $F_{neta} = -U'$, $U' = 0$ entrega los ptos. de eq. U' se refiere al gradiente 1D de U, donde hay <u>derivación espacial</u>, pero $U(\theta)$, por lo que la variable c/r a la cual hay que derivar es una longitud de arco, del tipo $s = R\theta$, y U es explícitamente fn. de θ, por lo que conviene hacer

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{d(R\theta)} = \frac{1}{R}\frac{d}{d\theta}$$

$$\frac{dU}{d\theta} = kR^2\left[0 + 2\cdot\frac{1}{2}\cos\theta/2\left(\sin\theta/2 - 1\right) + 2\sin\theta/2\cdot\left(\frac{1}{2}\cos\theta/2 - 0\right)\right]$$

$$= kR^2\left[\cos\theta/2\left(\sin\theta/2 - 1\right) + \sin\theta/2\cos\theta/2\right]$$

$$0 = kR^2\left[\cos\theta/2\left(\sin\theta/2 - 1\right) + \sin\theta/2\cos\theta/2\right]$$

$$0 = \cos\theta/2\left(\sin\theta/2 - 1 + \sin\theta/2\right)$$

$$0 = \cos\theta/2\,(2\sin\theta/2 - 1)$$

$\cos\theta/2 = 0$ o $\sin\theta/2 = \frac{1}{2}$

$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ $\quad\quad$ $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$

$\theta_0 = \pi, 3\pi, \ldots$ $\quad\quad$ $\theta_0 = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \ldots$

El rango de θ es $[0,\pi]$, luego solo importan los equilibrios

$$\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{3}, \pi}$$

B) · Calcular ω en torno eq. estable.

Primero hay que encontrar cuál es estable. Si x_0 es eq:

$U''(x_0) > 0 \longrightarrow x_0$ estable

$U''(x_0) < 0 \longrightarrow x_0$ inestable

De la parte anterior

$$\frac{dU}{d\theta} = kR^2\left[\cos\theta/2\,(\sin\theta/2 - 1) + \sin\theta/2\,\cos\theta/2\right]$$

$$= kR^2 \cos\theta/2\,(2\sin\theta/2 - 1)$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = kR^2\left[-\frac{1}{2}\sin\theta/2\,(2\sin\theta/2 - 1) + \cos\theta/2\left(2\cdot\frac{1}{2}\cos\theta/2 - 0\right)\right]$$

$$= kR^2\left(-\sin^2\theta/2 + \frac{1}{2}\sin\theta/2 + \cos^2\theta/2\right)$$

en $\theta_0 = \pi/3$:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_0 = \pi/3) = kR^2\left(-\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\right) > 0 \longrightarrow \boxed{\frac{\pi}{3}\ \text{estable}}$$

en $\theta_0 = \pi$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_0 = \pi) = kR^2\left(-1 + \frac{1}{2}\cdot 1 + 0\right) < 0 \longrightarrow \pi\ \text{inestable}$$

La frec ω de pequeñas osc. en torno a un punto de eq se define como

$$\omega^2 = \frac{1}{m}\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)$$

en este caso, nuestra variable de longitud es $x = R\theta$, así

$$\omega^2 = \frac{1}{m}\frac{d^2U}{d(R\theta)^2} = \frac{1}{mR^2}\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_0)$$

y como $\theta_0 = \pi/3$ es estable:

$$\omega^2 = \frac{1}{m\cancel{R^2}} \cdot \frac{3}{4}k\cancel{R^2} = \frac{3}{4}\frac{k}{m}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

c) · Con qué v_0 hay que lanzar a la partícula desde C hacia la izq para llegar a A con rapidez $v_0/2$?

Conservación de energía: $\Delta E = 0$ no hay fzas. NC.

$$E_C = E_A$$

$$\boxed{E_C = K_C + U_C}$$

enunciado: $K_C = \frac{1}{2}mv_0^2$

pot. $U_C = kR^2\left[\frac{9}{4} + 2\sin\theta/2\,(\sin\theta/2 - 1)\right]$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= kR^2\left[\frac{9}{4} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\right]$$

$$= kR^2\left(\frac{9}{4} + 1 - \sqrt{2}\right)$$

$$U_C = \frac{9}{4}kR^2 + (1-\sqrt{2})kR^2$$

$$\boxed{E_A = K_A + U_A}$$

enunciado: $K_A = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2$

$$K_A = \frac{1}{8}mv_0^2$$

pot. $U_A = kR^2\left[\frac{9}{4} + 2\sin\theta/2\,(\sin\theta/2 - 1)\right]$ en $\theta = \pi$

$$= kR^2\left[\frac{9}{4} + 2\cdot 1(1 - 1)\right]$$

$$U_A = \frac{9}{4}kR^2$$

Con todo lo anterior

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \cancel{\frac{9}{4}kR^2} + (1-\sqrt{2})kR^2 = \frac{1}{8}mv_0^2 + \cancel{\frac{9}{4}kR^2}$$

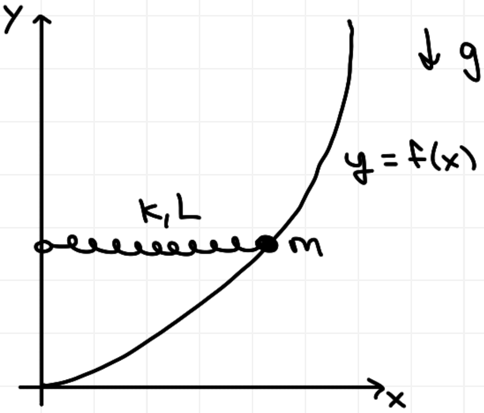
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)mv_0^2 = (\sqrt{2} - 1)kR^2$$

$$\frac{3}{8}mv_0^2 = (\sqrt{2} - 1)kR^2$$

$$v_0^2 = \frac{8(\sqrt{2} - 1)}{3}\,\frac{k}{m}R^2$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{8(\sqrt{2} - 1)}{3}}\sqrt{\frac{k}{m}}\,R}$$

P2



- Resorte siempre horizontal
- Existe campo $\vec{F}(x,y) = Ay\hat{x} + Bx\hat{y}$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{2L}$

A) • Mostrar $\vec{F}$ no cons. y encontrar cond. para que sí lo sea, y encontrar U_F

Para mostrar que no es cons. sirve utilizar la cond. $\nabla\times\vec{F}\neq 0$ si $\vec{F}$ es no cons. y esta condición (aux 7) se resume en 3 ecuaciones, donde particularmente dos se cumplen, pero no se tiene $\partial_x F_y = \partial_y F_x$, pues

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(Ay) = A$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(Bx) = B$$

y en general $A\neq B$. $\boxed{\text{Para que } \vec{F} \text{ sea conservativa, } A=B.}$ Busquemos U_F en este caso. Si $A=B$:

$$\vec{F} = A(y\hat{x} + x\hat{y}) = -\nabla U_F$$

$$Ay = -\frac{\partial U_F}{\partial x} \longrightarrow U_F = -Axy + C(y,z)$$

$$Ax = -\frac{\partial U_F}{\partial y} \longrightarrow U_F = -Axy + C(z)$$

$$0 = -\frac{\partial U_F}{\partial z} \longrightarrow U_F = C(x,y) = -Axy + C$$

$$\boxed{U_F = -Axy + C}$$

B) W de x_i a x_f de $\vec{F}$

$$W \equiv \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \begin{pmatrix} Ay \\ Bx \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$= \int Ay\,dx + Bx\,dy$$

Como $y = x^2/2L$ y $dy = \dfrac{dy}{dx}dx$ con $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{L}$,

$$W = \int A \cdot \frac{x^2}{2L}\, dx + Bx \cdot \frac{x}{L}\, dx$$

$$= \left(\frac{A}{2L} + \frac{B}{L}\right) \int x^2\, dx$$

$$= \left(\frac{A}{2L} + \frac{B}{L}\right) \cdot \frac{1}{3} \left(x_f^3 - x_i^3\right)$$

c) · Energía pot. total.

$U = U_g + U_e$ $\longrightarrow$ no incluye U_F porque consideramos $\vec{F}$ no cons.

$$U_g = mgy = \frac{mgx^2}{L}$$

$$U_e = \frac{1}{2} k (x-L)^2$$

$$U = \frac{mgx^2}{2L} + \frac{k}{2}(x-L)^2$$

D) $t=0$, $x_i = L$ y desciende con v_0, determinar x_f donde se detiene

$\Delta E = W_{NC}$ — solo de F entre $x_i = L$ y x_f incógnita.

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$$E_f = \cancel{K_f}^{\,0 \text{ — se detiene}} + U_f$$

$$U_f = \frac{mgx_f^2}{2L} + \frac{k}{2}(x_f - L)^2$$

$$E_i = K_i + U_i$$

$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$U_i = \frac{mgL^2}{2L} + \frac{k}{2}(L-L)^2 = \frac{mgL}{2}$$

Juntando todo:

$$\frac{mgx_f^2}{2L} + \frac{k}{2}(x_f - L)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{mgL}{2} = \left(\frac{A}{2L} + \frac{B}{L}\right) \cdot \frac{1}{3}\left(x_f^3 - L^3\right)$$

P3 · Mostrar que una fuerza central siempre es conservativa

Una fuerza central es de la forma $\vec{F} = F(r)\hat{r}$, donde

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{r}$$

con $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Así

$$\vec{F} = \frac{F(r)}{r}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$

$$F_x = \frac{F(r)x}{r} \qquad F_y = \frac{F(r)y}{r} \qquad F_z = \frac{F(r)z}{r}$$

Conviene estudiar si es conservativa encontrando $\nabla \times \vec{F}$ y verificando que es 0.

$$\nabla \times \vec{F} = \underbrace{\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)}_{1}\hat{x} + \underbrace{\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)}_{2}\hat{y} + \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)}_{3}\hat{z}$$

Los términos 1, 2 y 3 involucrarán derivadas del estilo $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\cdot 2x$$

$$= \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Anotando F por $F(r)$ y F' por $\partial F/\partial r$, y usando regla de la cadena:

1

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Fz}{r}\right) = z\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{yz}{r}\cdot\frac{F'r - F}{r^2}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Fy}{r}\right) = y\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{yz}{r}\cdot\frac{F'r - F}{r^2}$$

resta $= 0$

Lo mismo para el resto. ✓

Tb se puede encontrar $\nabla \times \vec{F}$ en esféricas y ver que, como las derivadas son cruzadas entre coords., todo es cero (ej. $F_\phi, F_\theta = 0$, $\partial_\phi F = \partial_\theta F = 0$)

oli