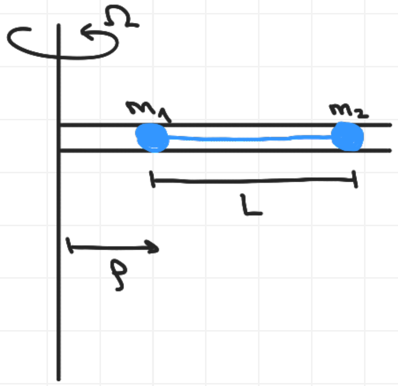
P1



- Mov. sin roce por el tubo
- m_1 y m_2 unidos por cuerda siempre tensa (L fijo)
- Sistema rota con vel. $\vec{\Omega}$
- Inicialmente m_1 a dist. R y ambos en reposo

a) • Definir posición y aceleración de c/masa

$$\vec{r}_1 = \rho\hat{\rho} \qquad \vec{r}_2 = (\rho + L)\hat{\rho}$$

$$\vec{a}_1 = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \cancel{\rho\ddot{\theta}}^{\,0})\hat{\theta} + \cancel{\ddot{z}}^{\,0}\hat{z}$$

$$= (\ddot{\rho} - \Omega^2\rho)\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\Omega\hat{\theta} \qquad \vec{a}_2 = (\ddot{\rho} - \Omega^2(\rho + L))\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\Omega\hat{\theta}$$

b) • Encontrar ecs. de mov.

Primero necesitamos saber qué fuerzas actúan sobre cada masa. Sobre m_1 y m_2 actúan la tensión y $\underbrace{\text{la fuerza de contacto con el tubo}}_{\text{normal}}$.

$$m_1: \quad \vec{F}_1 = \vec{T}_1 + \vec{N}_1 = T\hat{\rho} + N_{1\theta}\hat{\theta} + N_{1z}\hat{z}$$

$$m_2: \quad \vec{F}_2 = \vec{T}_2 + \vec{N}_2 = -T\hat{\rho} + N_{2\theta}\hat{\theta} + N_{2z}\hat{z}$$

N_z es nula porque no hay ni mov. en z, ni otras fuerzas en ese eje. Las masas solo sienten el contacto por la rotación en $\hat{\theta}$, por lo que solo hay normal en $\hat{\theta}$.

Aplicando segunda ley de Newton en m_1

$$T\hat{\rho} + N_{1\theta}\hat{\theta} + N_{1z}\hat{z} = m_1[(\ddot{\rho} - \Omega^2\rho)\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\Omega\hat{\theta}]$$

$$\begin{cases} T = m_1(\ddot{\rho} - \Omega^2\rho) & (1) \\ N_{1\theta} = 2m_1\dot{\rho}\Omega \\ N_{1z} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Como lo mencioné arriba, N_z se anula :)

y para m_2:

$$\begin{cases} -T = m_2[\ddot{\rho} - \Omega^2(\rho + L)] & (2) \\ N_{2\theta} = 2m_2\dot{\rho}\Omega \\ N_{2z} = 0 \end{cases}$$

c) • Calcular tensión

(1) y (2) contienen a T, pero también a $\ddot{\rho}$ y ρ. Es posible eliminar estas cantidades al multiplicar $(1)\cdot m_2$ y $(2)\cdot m_1$ y luego restar:

$$(1) \longrightarrow \quad T m_2 = m_1 m_2 \ddot{\rho} - m_1 m_2 \Omega^2 \rho$$

$$(2) \longrightarrow \quad -T m_1 = m_1 m_2 \ddot{\rho} - m_1 m_2 \Omega^2 \rho + m_1 m_2 \Omega^2 L$$

$$(m_1 + m_2) T = m_1 m_2 \Omega^2 L$$

$$\boxed{T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Omega^2 L}$$

d) • Resolver $\rho(t)$

Sumando (1) y (2)

$$T = m_1 (\ddot{\rho} - \Omega^2 \rho)$$
$$-T = m_2 [\ddot{\rho} - \Omega^2 (\rho + L)]$$

$$0 = (m_1 + m_2)\ddot{\rho} - (m_1 + m_2)\Omega^2 \rho - m_2 \Omega^2 L$$

$$0 = \ddot{\rho} - \Omega^2 \rho - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \Omega^2 L$$

$$\ddot{\rho} - \Omega^2 \rho = \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2} \Omega^2 L}_{(*)}$$

sol. $\rho = \rho_h + \rho_p$

homo.: $\ddot{\rho} - \Omega^2 \rho = 0 \longrightarrow$ EDO lineal orden $2 \rightarrow 2$ sol.

ansatz $\rho = A e^{\lambda t} \longrightarrow \ddot{\rho} = \lambda^2 A e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 - \Omega^2 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm \Omega \longrightarrow \rho_h \in \{ e^{\Omega t}, e^{-\Omega t} \}$$

$\rho_h = A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t} \longrightarrow$ combinación lineal (son 2 soluciones)

part.: como sobra una cte. (*), se puede suponer $\rho_p = C$, y reemplazando

$$-\cancel{\Omega^2} C = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cancel{\Omega^2} L$$

$$C = -\frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{\rho(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}}$$

cond. ini: $\vec{r}_1(0) = R\hat{\rho} \longrightarrow \rho(0) = R$

$$R = A + B - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{A + B = R + \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}}$$

$$\dot{\rho}(0) = 0$$

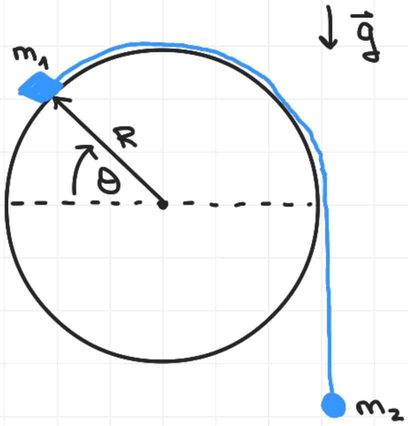
$$\dot{\rho}(t) = \Omega \left(Ae^{\Omega t} - Be^{-\Omega t} \right)$$

$$0 = A - B \longrightarrow \boxed{B = A}$$

$$A = B = \frac{1}{2}\left(R + \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} \right)$$

$$\boxed{\rho(t) = \frac{1}{2}\left(R + \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} \right)\left(e^{\Omega t} + e^{-\Omega t} \right) - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}}$$

P2



$\downarrow \vec{g}$

- Cuerda ideal de largo πR
- $m_2 > m_1$
- $\vec{r}_1(t=0) = -R\hat{x}$ $\qquad \vec{r}_2(t=0) = R\hat{x}$

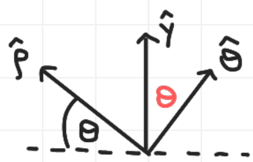
a) • Ecuaciones de mov.

Para m_1, $\quad \vec{r}_1 = R\hat{r} \quad$ y $\quad \vec{a}_1 = (\cancel{\ddot{R}} - R\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\cancel{2\dot{R}\dot{\theta}} + R\ddot{\theta})\hat{\theta}$

$$\vec{a}_1 = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

y las fuerzas que actúan sobre esta son la tensión $\vec{T} \propto \hat{\theta}$, la fuerza normal $\vec{N} \propto \hat{\rho}$ y el peso $m_1\vec{g} \propto -\hat{y}$.

Como el mov. de m_1 es circunferencial, son útiles las coord. polares, por lo que hay que escribir el peso en los ejes $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$:



$$\hat{y} = (\hat{y}\cdot\hat{\rho})\hat{\rho} + (\hat{y}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta}$$

$$\hat{y}\cdot\hat{\rho} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\hat{y}\cdot\hat{\theta} = \cos\theta$$

$$\hat{y} = \sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{\theta}$$

fuerzas: $\quad \vec{T} = T\hat{\theta}$

$\qquad \vec{N} = N\hat{\rho}$

$\qquad m_1\vec{g} = -m_1 g(\sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{\theta})$

Newton:

$$T\hat{\theta} + N\hat{\rho} - m_1 g(\sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{\theta}) = m_1(-R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta})$$

- $\hat{\rho}$ | $\quad \boxed{N - m_1 g\sin\theta = -m_1 R\dot{\theta}^2} \quad (1)$
- $\hat{\theta}$ | $\quad \boxed{T - m_1 g\cos\theta = m_1 R\ddot{\theta}} \quad (2)$

Para m_2, $\vec{a}_2 = \ddot{y}\hat{y}$. Las fuerzas sobre m_2 son $\vec{T} \propto \hat{y}$ y el peso $m_2\vec{g} \propto -\hat{y}$:

<u>fuerzas</u>: $\vec{T} = T\hat{y}$

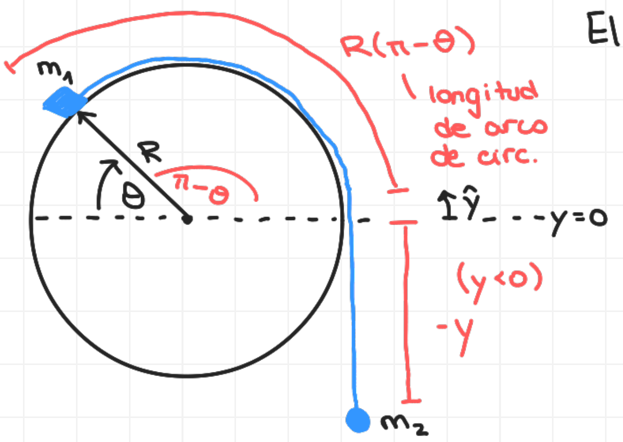
$$m_2\vec{g} = -m_2 g\hat{y}$$

<u>Newton</u>:

$$T\hat{y} - m_2 g\hat{y} = m_2\ddot{y}\,\hat{y}$$

$$\cdot\hat{y} \rfloor \quad \boxed{T - m_2 g = m_2\ddot{y}} \qquad (3)$$

b) • Determinar T.



El largo de la cuerda es πR. Luego:

$$R(\cancel{\pi}-\theta) + (-y) = \cancel{\pi R}$$

$$-R\theta - y = 0$$

$$-R\theta = y \quad \Big/ \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\boxed{\ddot{y} = -R\ddot{\theta}} \qquad (5)$$

(4) en (3)

$$\hookrightarrow \quad T - m_2 g = m_2(-R\ddot{\theta})$$

$$-\frac{T}{m_2} + g = R\ddot{\theta} \qquad (5)$$

(5) en (2)

$$T - m_1 g\cos\theta = m_1\left(g - \frac{T}{m_2}\right)$$

$$T\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = m_1 g(1 + \cos\theta)$$

$$\boxed{T(\theta) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g(1 + \cos\theta)}$$

c) · Calcular $\dot{\theta}(\theta)$

$$(2) \longrightarrow \frac{\cancel{m_1} m_2}{m_1+m_2} g(1+\cos\theta) - \cancel{m_1} g\cos\theta = \cancel{m_1} R\ddot{\theta}$$

$$m_2 g(1+\cancel{\cos\theta}) - (m_1+\cancel{m_2}) g\cos\theta = (m_1+m_2)R\ddot{\theta}$$

$$m_2 g - m_1 g\cos\theta = (m_1+m_2)R\ddot{\theta} \qquad /\cdot\dot{\theta}$$

$$m_2 g \frac{d\theta}{dt} - m_1 g\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = (m_1+m_2)R\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt} \qquad \Big| \int_0^t dt$$

$$m_2 g\int d\theta - m_1 g\int \cos\theta \, d\theta = (m_1+m_2)R\int \dot{\theta}\, d\dot{\theta}$$

$$m_2 g(\theta - \cancel{\theta_0}) - m_1 g(\sin\theta - \cancel{\sin\theta_0}) = (m_1+m_2)R\cdot\frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 - \cancel{\dot{\theta}_0^2})$$

cond. ini $\theta_0 = 0 \quad \dot{\theta}_0 = 0$

$$m_2 g\theta - m_1 g\sin\theta = \frac{1}{2}R(m_1+m_2)\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{2g}{(m_1+m_2)R}(m_2\theta - m_1\sin\theta)} = \dot{\theta}}$$

d) · θ_D de despegue.

El despegue ocurre cuando $N=0$. Solo una ec. presenta a N:

$$(1) \longrightarrow \quad N - m_1 g\sin\theta = -m_1 R\dot{\theta}^2$$

Conocemos $\dot{\theta}^2$ de la parte anterior

$$\cancel{N}^{\,0} - \cancel{m_1}\cancel{g}\sin\theta = -\cancel{m_1}\cancel{R}\cdot\frac{2\cancel{g}}{\cancel{R}(m_1+m_2)}(m_2\theta - m_1\sin\theta)$$

$$(m_1+m_2)\sin\theta_D = 2(m_2\theta_D - m_1\sin\theta_D)$$

$$\boxed{(3m_1+m_2)\sin\theta_D = 2m_2\theta_D}$$