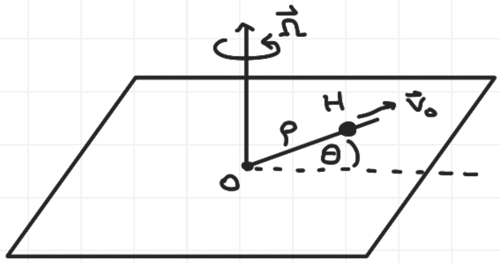
P1



- $\vec{\Omega}$ constante
- H se desplaza con v_0 por la barra
- Inicialmente H está en O

a) Trayectoria de H

Como la hormiga se desplaza con v_0 constante, $\dot{\rho} = v_0$, y queremos encontrar $\rho(\theta)$.

$$\dot{\rho} = v_0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = v_0$$

regla de la cadena

$$\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = v_0$$

Luego, como gira con $\vec{\Omega}$ constante, $\dot{\theta} = \Omega$, y

$$\frac{d\rho}{d\theta}\Omega = v_0$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{v_0}{\Omega} \quad \Big/ \int_{\theta=0}^{\theta} d\theta$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta} \frac{d\rho}{d\theta} d\theta = \frac{v_0}{\Omega}\int_0^{\theta} d\theta$$

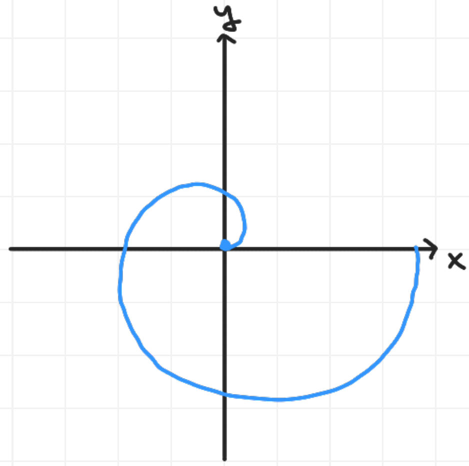
$$\int_{\rho(0)}^{\rho(\theta)} d\rho = \frac{v_0}{\Omega}\theta$$

$$\rho(\theta) - \rho(0) = \frac{v_0}{\Omega}\theta$$

En $t=0$, $\rho = 0$, pero también $\theta = 0$, con lo que $\rho(0) = 0$

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{v_0}{\Omega}\theta}$$

Gráficamente,



b) Velocidad absoluta de H en función de θ

En polares, $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$. Como $\rho = v_0\theta/\Omega$, $\dot{\rho} = v_0$ y $\dot{\theta} = \Omega$,

$$\vec{v} = v_0\hat{\rho} + \frac{v_0\theta}{\cancel{\Omega}}\cancel{\Omega}\hat{\theta} = v_0(\hat{\rho} + \theta\hat{\theta})$$

y la rapidez v es

$$v^2 = v_0^2(1+\theta^2)$$

$$\boxed{v = v_0\sqrt{1+\theta^2}}$$

c) Aceleración en función de θ

En polares, $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}$, así

$$a^2 = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2$$

$\dot{\rho} = cte$

$\dot{\theta} = cte$

$$a^2 = \rho^2\dot{\theta}^4 + 4\dot{\rho}^2\dot{\theta}^2$$

$$a^2 = \frac{v_0^2\theta^2}{\Omega^2}\Omega^4 + 4v_0^2\Omega^2$$

$$a^2 = v_0^2\theta^2\Omega^2 + 4v_0^2\Omega^2$$

$$\boxed{a(\theta) = v_0\Omega\sqrt{4+\theta^2}}$$

d) Radio de curvatura en función de θ

Se define el radio de curvatura como

$$R_c \equiv \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}$$

y tenemos $v = v_0\sqrt{1+\theta^2} \longrightarrow v^3 = v_0^3(1+\theta^2)^{3/2}$

También

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} = v_0\hat{\rho} + v_0\theta\hat{\theta} = v_0(\hat{\rho} + \theta\hat{\theta})$$

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \cancel{\rho\ddot{\theta}})\hat{\theta}$$

$$= -\rho\dot{\theta}^2\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$= -\frac{v_0\theta}{\Omega}\Omega^2\hat{\rho} + 2v_0\Omega\hat{\theta}$$

$$= v_0\Omega(-\theta\hat{\rho} + 2\hat{\theta})$$

Con esto,

$$\vec{v} \times \vec{a} = v_0(\hat{\rho} + \theta\hat{\theta}) \times v_0\Omega(-\theta\hat{\rho} + 2\hat{\theta})$$

$$= v_0^2\Omega\left[(\hat{\rho} + \theta\hat{\theta}) \times (-\theta\hat{\rho} + 2\hat{\theta})\right]$$

$$= v_0^2\Omega\left[(\hat{\rho} + \theta\hat{\theta}) \times -\theta\hat{\rho} + (\hat{\rho} + \theta\hat{\theta}) \times 2\hat{\theta}\right]$$

$$= v_0^2\Omega\left[-\theta^2(\hat{\theta} \times \hat{\rho}) + 2\hat{\rho} \times \hat{\theta}\right]$$

$$= v_0^2\Omega\left[-\theta^2(-\hat{z}) + 2\hat{z}\right]$$

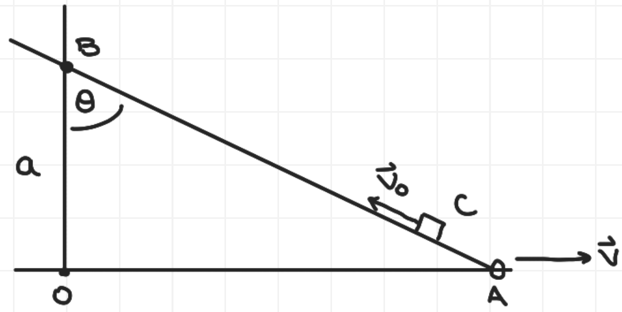
$$= v_0^2\Omega(2 + \theta^2)\hat{z}$$

$$\|\vec{v} \times \vec{a}\| = v_0^2\Omega(2 + \theta^2)$$

Finalmente,

$$R_c \equiv \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} = \frac{v_0^3(1+\theta^2)^{3/2}}{v_0^2\Omega(2+\theta^2)} = \boxed{\frac{v_0}{\Omega}\,\frac{(1+\theta^2)^{3/2}}{2+\theta^2} = R_c(\theta)}$$

P2



- Barra muy larga (un extremo en A)
- A se desplaza por eje horizontal con $\vec{v}$ constante
- B soporte fijo, distancia $\overline{OB} = a$ constante
- Ciclista parte desde A hacia B con vel. uniforme $\vec{v}_0$ c/r a la barra
- $v_0 > v$

a) Velocidad ciclista c/r a O al llegar a B

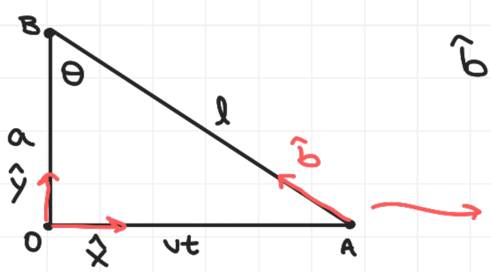
Para encontrar $\vec{v}_{cic}$ (c/r a O) podemos derivar su posición c/r a O. Esta será la suma vectorial entre la posición de A c/r a O y del ciclista c/r a A:

$$\vec{r}_{cic} = \vec{r}_{OA} + \vec{r}_{AC}$$

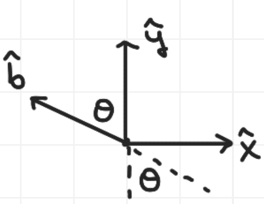
Tanto A c/r a O, como C c/r a A se mueven con rapidez constante, v y v_0 respectivamente, por lo que $\|\vec{r}_{OA}\| = vt$ y $\|\vec{r}_{AC}\| = v_0 t$. También, $\vec{r}_{OA}$ está contenido solo en el eje x y $\vec{r}_{AC}$ en el eje de la barra. Así

(1) $\quad \vec{r}_{cic} = vt\,\hat{x} + v_0 t\,\hat{b}$ $\qquad$ $\hat{b}$: vector unitario que parte en A y sigue a la barra.

Ahora, tenemos que determinar $\hat{b}(\theta(t))$. De la trigonometría del problema



$$\hat{b} = \hat{b}\cdot\hat{x}\,\hat{x} + \hat{b}\cdot\hat{y}\,\hat{y}$$



$$\hat{b}\cdot\hat{x} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\hat{b}\cdot\hat{y} = \cos\theta$$

$$\hat{b} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y} \qquad (2)$$

y de la geometría del triángulo AOB

$$l^2 = a^2 + v^2t^2 \longrightarrow l = \sqrt{a^2 + v^2t^2}$$

Luego, como necesitamos $\theta(t)$ para poder escribir $\hat{b}(t)$, calculamos $\cos\theta(t)$ y $\sin\theta(t)$:

$$\cos\theta = \frac{a}{\ell} = \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{vt}{\ell} = \frac{vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}} \qquad (3)$$

Así, obtenemos $\hat{b}(t)$ de (2) y (3)

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}\left(-vt\,\hat{x} + a\hat{y}\right)$$

$$\dot{\hat{b}} = \frac{-av}{(a^2+v^2t^2)^{3/2}}\left(a\hat{x} + vt\,\hat{y}\right) \qquad (4) \quad \leftarrow \text{lo necesitaremos}$$

Sigue que, para encontrar la vel. del ciclista c/r a O, derivamos (1) c/r al tiempo

$$\vec{r}_{cic} = vt\,\hat{x} + v_0 t\,\hat{b} \qquad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\vec{v}_{cic} = v\hat{x} + v_0\hat{b} + v_0 t\,\dot{\hat{b}}$$

$$\boxed{\vec{v}_{cic} = v\hat{x} + \frac{v_0}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}\left(-vt\,\hat{x} + a\hat{y}\right) - \frac{avv_0t}{(a^2+v^2t^2)^{3/2}}\left(a\hat{x}+vt\,\hat{y}\right)} \qquad (5)$$

Tenemos la velocidad del ciclista, solo basta evaluarla en el instante en que llega a B. Este instante se puede obtener al tomar $x(t)=0$

$$x(t) = \vec{r}_{cic}\cdot\hat{x} = vt\,\hat{x} + v_0 t\,\hat{b}$$

$$= vt + v_0 t\,\hat{b}\cdot\hat{x}$$

$$= vt + v_0 t \cdot \frac{-vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$vt\left(1 - \frac{v_0 t}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}\right) = 0$$

$t=0$ (instante inicial) o $1 - \dfrac{v_0 t}{\sqrt{a^2+v^2t^2}} = 0$

$$\sqrt{a^2 + v^2 t^2} = v_0 t$$

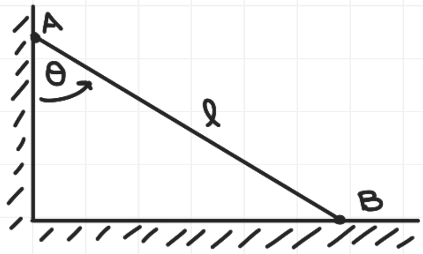
$$a^2 = v_0^2 t^2 - v^2 t^2$$

$$a = t\sqrt{v_0^2 - v^2}$$

$$\boxed{t = \frac{a}{\sqrt{v_0^2 - v^2}}} \quad (6)$$

Evaluando (6) en (5) se encuentra lo solicitado.

P3



- Barra cae desde la vertical, A y B siempre en contacto.

a) Posición, velocidad y aceleración del punto medio en función de θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$

Si el extremo B está en $(x, 0)$ y A en $(0, y)$, entonces el punto medio estará en $(x/2, y/2)$. Por trigonometría

$$\cos\theta = \frac{y}{l} \qquad \sin\theta = \frac{x}{l}$$

$$y = l\cos\theta \qquad x = l\sin\theta$$

Así, la posición del punto medio es

$$\vec{r}_{pm} = \frac{x}{2}\hat{x} + \frac{y}{2}\hat{y}$$
$$= \frac{l}{2}\sin\theta\,\hat{x} + \frac{l}{2}\cos\theta\,\hat{y}$$

Su velocidad y aceleración serán

$$\vec{v}_{pm} = \dot{\vec{r}}_{pm} = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{x} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{y} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$$

$$\vec{a}_{pm} = \dot{\vec{v}}_{pm} = \frac{l}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\hat{x} - \frac{l}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\hat{y} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$

b) Calcular radio de curvatura que sigue el centro

$$R_c \equiv \frac{v^3}{\|\vec{v}\times\vec{a}\|}$$

Necesitamos v. Por la parte anterior,

$$v^2 = \left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \longrightarrow v = \frac{l\dot{\theta}}{2}$$

$$v^3 = \frac{l^3\dot{\theta}^3}{8} \qquad (1)$$

Calculando $\vec{v}\times\vec{a}$:

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x a_y - v_y a_x \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{v}\times\vec{a}\| = |v_x a_y - v_y a_x|$$

$$= \left|\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta \cdot -\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) - \left(-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\right|$$

$$= \frac{l^2}{4}\left|\cancel{-\dot{\theta}\ddot{\theta}\cos\theta\sin\theta} - \dot{\theta}^3\cos^2\theta + \cancel{\dot{\theta}\ddot{\theta}\sin\theta\cos\theta} - \dot{\theta}^3\sin^2\theta\right|$$

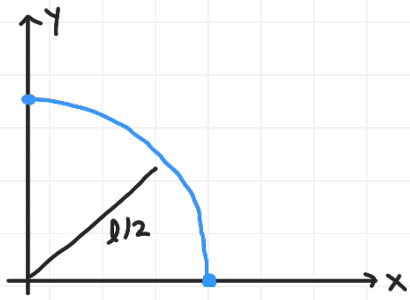
$$= \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^3 \qquad (2)$$

Juntando (1) y (2) en R_c:

$$\boxed{R_c = \frac{l^3\dot{\theta}^3/8}{l^2\dot{\theta}^3/4} = \frac{l}{2}}$$

El radio de curvatura es constante, por lo que la trayectoria que sigue el centro de la barra es circunferencial.

Punto inicial (completamente vertical): $(0, l/2)$
" final (" horizontal): $(l/2, 0)$



c) Extremo B se mueve con rapidez cte. Determinar $\theta(t)$.

La posición de B es $\vec{r}_B = x\hat{x} = l\sin\theta\,\hat{x}$, y si se mueve a rapidez constante v_0 entonces $\vec{r}_B = v_0 t$, luego

$$l\sin\theta = v_0 t$$

$$\boxed{\theta = \arcsin\frac{v_0 t}{l}}$$