

P2

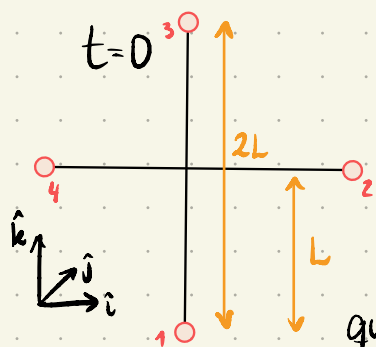
Auxiliar 21

Como indican las figuras, es importante dividir el problema en 2 partes, justo antes que 2 colisione y justo después de que colisione

Primera parte

Solo tenemos fuerzas internas (las barras que unen las partículas) y la normal que ejerce el suelo sobre la masa pivote, por lo que se conserva la energía

Como inicialmente el sist. está en reposo, solo tenemos energía potencial



$$E_0 = \sum U_{i,0} = U_{1,0} + U_{2,0} + U_{3,0} + U_{4,0}$$

$$= mg \cdot 0 + mgL + mg2L + mgL = 4mgL \quad \text{Conservado}$$

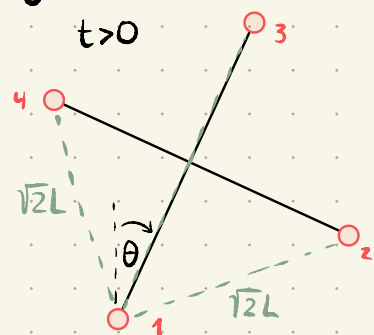
Justo antes que 2 colisione, claramente todas las partículas, menos 1, tienen velocidad $\Rightarrow$ energía cinética, además de energía potencial, por lo que primero expresamos K

$$K_{-\epsilon} = \sum K_{i,-\epsilon} = \sum \frac{1}{2} m v_{i,-\epsilon}^2 = \frac{1}{2} m (\cancel{v_1^2} + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2)$$

$$= \frac{1}{2} m ((\sqrt{2}L\dot{\theta}_{-\epsilon})^2 + (2L\dot{\theta}_{-\epsilon})^2 + (\sqrt{2}L\dot{\theta}_{-\epsilon})^2)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\theta}_{-\epsilon}^2 (2L^2 + 4L^2 + 2L^2) = 4L^2 m \dot{\theta}_{-\epsilon}^2$$

El subíndice $-\epsilon$ denota que nos referimos a una cantidad justo antes del choque

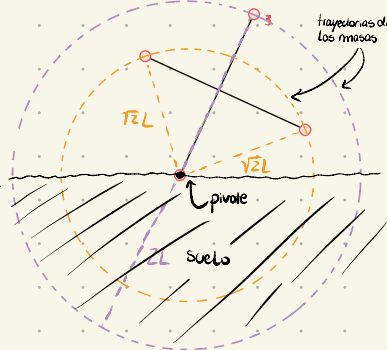


Donde es importante que se den cuenta que cada partícula sigue un movimiento circular, por lo que las velocidades usadas son únicamente tangenciales, de la forma

$$v_i = R_i \dot{\theta}$$

donde los radios R_i son los dibujados en verde con líneas punteadas

Ahora la potencial se calcula con geometría simplemente, sin embargo consideramos que 2 ya está a la altura del suelo. Esto lo podemos hacer porque justo antes que 2 colisione, está a una altura infinitesimal sobre el piso, por lo que la podemos despreciar



$$U_{-\epsilon} = \sum U_{i,-\epsilon} = mg \sum z_{i,-\epsilon} = mg(\cancel{z_1} + \cancel{z_2} + z_3 + z_4)$$

$$= mg(\sqrt{2}L + \sqrt{2}L) = 2mg\sqrt{2}L$$

Usamos conservación de la energ. mec. y despejamos $\dot{\theta}_{-\epsilon}$

$$E_0 = E_{-\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4mgL} = \cancel{4L^2 m \dot{\theta}_{-\epsilon}^2} + \cancel{2mg\sqrt{2}L}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_{-\epsilon} = \sqrt{\frac{2g - \sqrt{2}g}{2L}}$$

en su componente en $\hat{k}$

Para calcular la normal usamos el CM (justo al medio de la cruz) que tiene la ec. de mov.

$$4m\ddot{Z}_{cm} = -4mg + N$$

$$\Leftrightarrow N = 4m(\ddot{Z}_{cm} + g)$$

donde Z_{cm} lo podremos describir en función de θ como

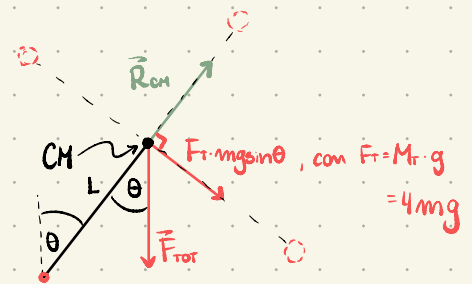
$$Z_{cm} = L \cos \theta \Rightarrow \dot{Z}_{cm} = -L \dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \ddot{Z}_{cm} = -L \ddot{\theta} \sin \theta - L \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow N = 4m(-L \ddot{\theta} \sin \theta - L \dot{\theta}^2 \cos \theta + g) \quad (1)$$

así que debemos encontrar $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, que podremos conseguir con otra ec.: la relación torque-momentum angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$$

donde $\vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{ext}^{cm} = L \cdot 4mg \sin \theta \hat{j}$ } ver anexo 1 para más detalle



Y el momentum angular $\vec{L} = \sum m \vec{r}_i \times \vec{v}_i$

$$= m \sum r_i v_i \hat{j} \quad / \vec{r}_i \perp \vec{v}_i \quad \text{velocidades circulares.}$$

$$= m(12L \cdot (12L \dot{\theta}) + 2L \cdot (2L \dot{\theta}) + 12L \cdot (12L \dot{\theta})) \hat{j}$$

$$= 8mL^2 \dot{\theta} \hat{j}$$

por lo que nos quedaría

$$\Rightarrow \cancel{8mL^2 \ddot{\theta}} = \cancel{4mgL \sin \theta}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{2L} g \sin \theta$$

$$\Rightarrow \int \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{g}{2L} \int \sin \theta d\theta \quad \text{truco mecánica}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{2L} (\cos \theta - 1)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{L} (1 - \cos \theta)}$$

Así que (1) nos quedaría

$$N = 4m \left(-L \cdot \frac{1}{2L} g \sin \theta \cdot \sin \theta - L \frac{g}{L} (1 - \cos \theta) \cos \theta + g \right)$$

$$= 4m \left(-\frac{g}{2} \sin^2 \theta - g \cos \theta + g \cos^2 \theta + g \right)$$

$$= 4m \left(\frac{g}{2} - g \cos \theta + \frac{3}{2} g \cos^2 \theta \right)$$

y cuando 2 está justo antes de chocar el piso $\theta = \pi/4$

$$\Rightarrow N(\theta=\pi/4) = 4m \left(\frac{g}{2} - g\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}g\frac{1}{2} \right)$$

$$= 4m \left(\frac{2g}{4} + \frac{3g}{4} - g\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4m \left(\frac{5g}{4} - g\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

b. Si calculamos $\vec{L}$ c/r a 2, notamos que la fuerza ejercida por el suelo sobre esta partícula no ejerce torque, por lo que se conserva el momentum angular c/r a 2.

Calculemos el momentum angular c/r a 2 justo antes del choque, donde la velocidad angular es $\dot{\theta}_{-\epsilon}$ y recordemos que las magnitudes de las velocidades son

$$|\vec{v}_1| = 0, |\vec{v}_3| = 2L\dot{\theta}_{-\epsilon}, |\vec{v}_4| = \sqrt{2}L\dot{\theta}_{-\epsilon}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_2 = \sum_i m \vec{r}_{i,2} \times \vec{v}_{i,2} = m \sum_i r_{i,2} |\vec{v}_i| \sin(\alpha_{i,2}) \hat{j}$$

$$= m r_{3,2} \cdot 2L\dot{\theta}_{-\epsilon} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \hat{j} + m r_{4,2} \cdot \sqrt{2}L\dot{\theta}_{-\epsilon} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \hat{j}$$

$$= m \sqrt{2}L \cdot 2L\dot{\theta}_{-\epsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} + m 2L \cdot \sqrt{2}L\dot{\theta}_{-\epsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} \quad \text{ver anexo 2}$$

$$= 2mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon} \hat{j} + 2mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon} \hat{j} = 4mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon} \hat{j}$$

Y ahora calculamos $\vec{L}$, nuevamente con respecto a 2, pero luego del choque, donde 1 si tendrá velocidad y la velocidad angular del sist. c/r a la vertical será $\dot{\theta}_{+\epsilon}$

$$\Rightarrow \vec{L}_{2,+\epsilon} = \sum_i m \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m r_i v_i \hat{j} \quad \text{ahora el pivote es 2, por lo que es análogo a la primera parte, } \vec{r}_i \perp \vec{v}_i$$

$$= m r_1 v_1 \hat{j} + m r_3 v_3 \hat{j} + m r_4 v_4 \hat{j}$$

$$= (m \sqrt{2}L (\sqrt{2}L\dot{\theta}_{+\epsilon}) + m \sqrt{2}L (\sqrt{2}L\dot{\theta}_{+\epsilon}) + m 2L (2L\dot{\theta}_{+\epsilon})) \hat{j}$$

$$= 8mL^2\dot{\theta}_{+\epsilon} \hat{j}$$

Ahora, por conservación del momentum angular c/r a 2

$$\vec{L}_{2,-\epsilon} = \vec{L}_{2,+\epsilon}$$

$$\Rightarrow 4mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon} = 8mL^2\dot{\theta}_{+\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}_{+\epsilon} = \frac{\dot{\theta}_{-\epsilon}}{2}$$

donde conocemos el valor de $\dot{\theta}_{-\epsilon}$ de a). Para calcular la energía mecánica justo después del choque hacemos la aproximación de que tanto 1 como 2 están en el suelo

$$\triangleright K_{+\epsilon} = \frac{1}{2} m (\sqrt{2}L\dot{\theta}_{+\epsilon})^2 + \frac{1}{2} m (2L\dot{\theta}_{+\epsilon})^2 + \frac{1}{2} m (\sqrt{2}L\dot{\theta}_{+\epsilon})^2$$

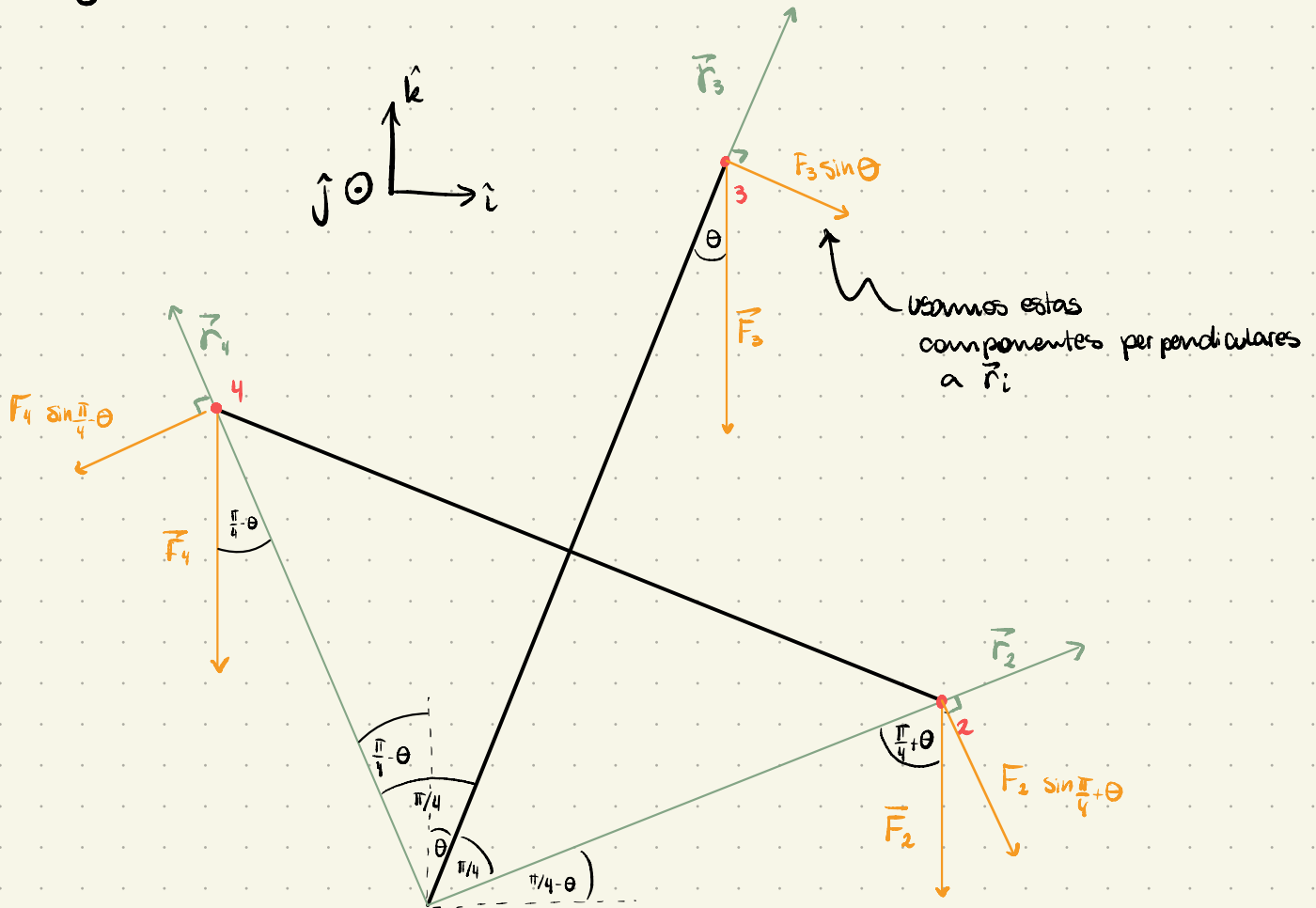
$$= \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}_{+\epsilon}^2 (2 + 4 + 2) = 4mL^2\dot{\theta}_{+\epsilon}^2 = mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon}^2$$

$$\triangleright U_{+e} = 2mg\sqrt{2}L$$

$$\Rightarrow E_{+e} = K_{+e} + U_{+e}$$

Anexo 1.

Para los productos cruz podemos hacer el truco de encontrar la componente del segundo vector que sea perpendicular al primero, con esto encontramos la magnitud, la dirección la obtenemos haciendo regla de la mano derecha

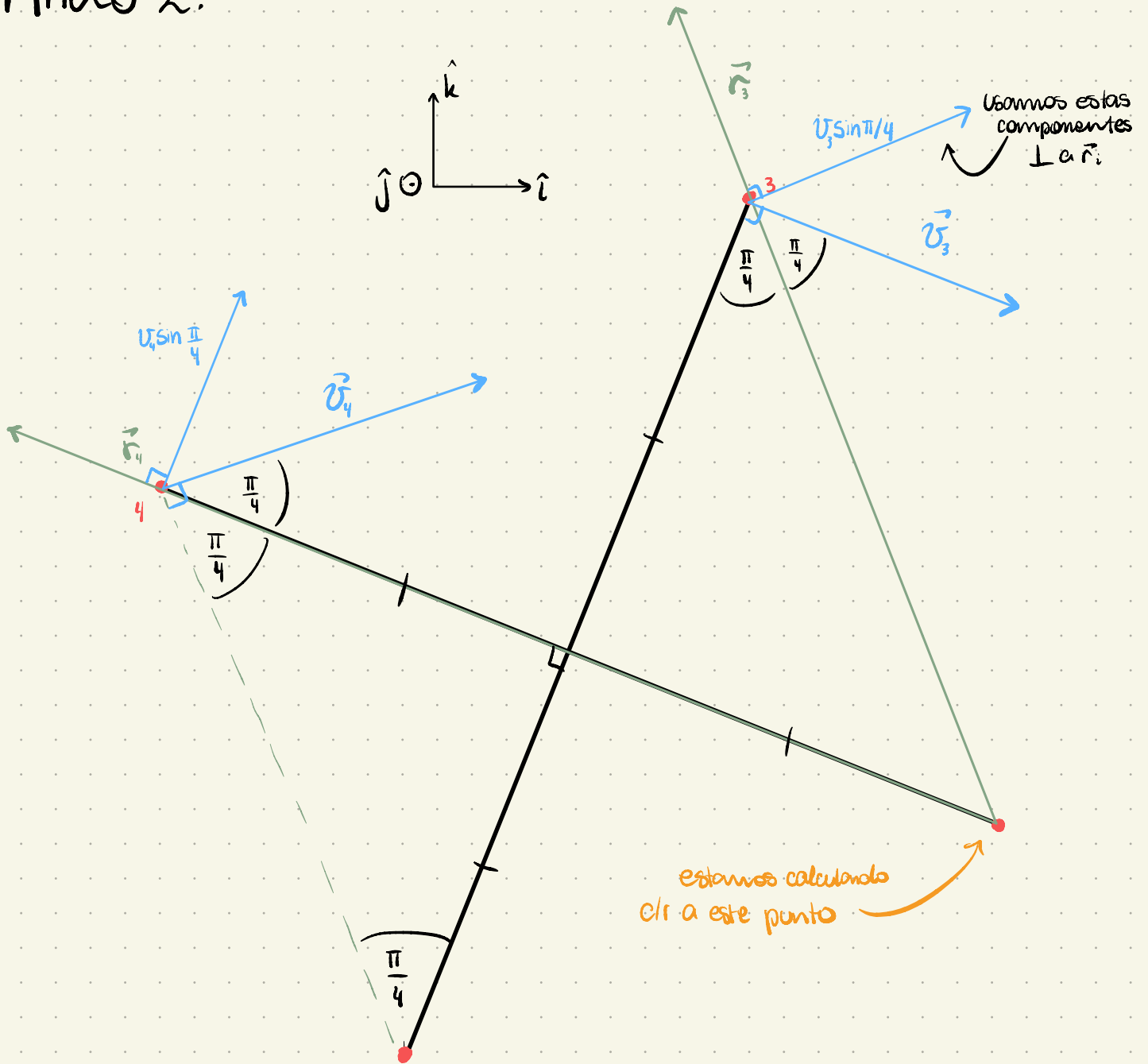


Debido a que es un sólido rígido podemos calcular el torque externo como el torque ejercido sobre el CM, pero también lo podemos hacer sumando los torques sobre cada partícula por separado (normalmente es más laborioso de esta última forma, pero démosle)

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau}_{\text{ext}} &= \sum_i \vec{\tau}_{\text{ext},i} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 \\
 &= r_2 F_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \hat{j} + r_3 F_3 \sin \theta \hat{j} - r_4 F_4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \hat{j} \\
 &= \sqrt{2} L m g \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \right) \hat{j} + 2 L m g \sin \theta \hat{j} \\
 &= \sqrt{2} L m g \sqrt{2} \sin \theta \hat{j} + 2 m g L \sin \theta \hat{j} \\
 &= 4 m g L \sin \theta \hat{j}
 \end{aligned}$$

Que es lo mismo a lo que llegamos usando CM

Anexo 2.



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{L}_z &= m \vec{r}_3 \times \vec{v}_3 + m \vec{r}_4 \times \vec{v}_4 = m \left(r_3 v_3 \sin \frac{\pi}{4} \hat{j} + r_4 v_4 \sin \frac{\pi}{4} \hat{j} \right) \\
 &= m \left(\sqrt{2} L (2L \dot{\theta} - \epsilon) \frac{1}{\sqrt{2}} + 2L (\sqrt{2} L \dot{\theta} - \epsilon) \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{j} \\
 &= 4mL^2 \dot{\theta} - \epsilon \hat{j}
 \end{aligned}$$