

P1

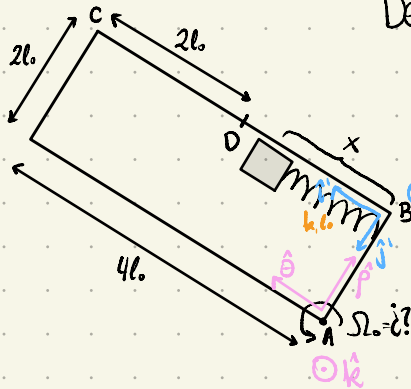
Auxiliar 21

a. Recordamos: $m\vec{a}' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$
reales translacional centrífuga Coriolis azimutal

Definimos un SRI con coordenadas cilíndricas en el vértice A

$$\vec{R} = 2l\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = 2l\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 2l\ddot{\theta}\hat{\theta} - 2l\dot{\theta}^2\hat{\rho} = -2l\Omega^2\hat{\rho}$$

y definimos un SRNI con coordenadas cartesianas con origen en el vértice B y calzando el eje $\hat{i}'$ con la pared BC $\Rightarrow \hat{i}' = \hat{\theta}$ $\hat{j}' = -\hat{\rho}$



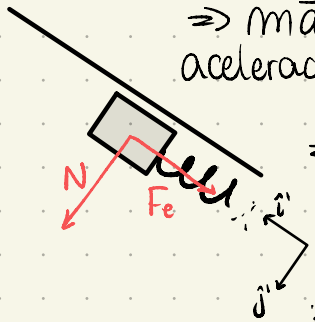
$$\begin{aligned} -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') &= -m\Omega_0\hat{k} \times (\Omega_0\hat{k} \times x'\hat{i}') \\ &= -m\Omega_0^2 x'\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i}') \\ &= -m\Omega_0^2 x'\hat{k} \times \hat{j}' = m\Omega_0^2 x'\hat{i}' \end{aligned}$$

$$-2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' = -2m\Omega_0\hat{k} \times \dot{x}'\hat{i}' = -2m\Omega_0\dot{x}'\hat{k} \times \hat{i}' = -2m\Omega_0\dot{x}'\hat{j}'$$

$$-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' = 0 \quad / \text{por enunciado } \Omega \text{ es cte.}$$

Habiendo encontrado las fuerzas ficticias, seguimos con las reales que afectan a la masa, son: la fuerza elástica del resorte (paralela a la pared BC, eje $\hat{i}'$) y una fuerza normal que ejerce la pared BC (perpendicular a la pared BC, eje $\hat{j}'$)

$\Rightarrow m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{reales}} = -k(x' - l_0)\hat{i}' + N\hat{j}'$, con lo que podemos describir la aceleración $\vec{a}'$ del SRNI, juntamos todo



$$\Rightarrow m\vec{a}' = -2ml_0\Omega_0^2\hat{j}' - k(x' - l_0)\hat{i}' + N\hat{j}' + m\Omega_0^2 x'\hat{i}' - 2m\Omega_0\dot{x}'\hat{j}'$$

$$\Rightarrow m(\ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}') = -2ml_0\Omega_0^2\hat{j}' - k(x' - l_0)\hat{i}' + N\hat{j}' + m\Omega_0^2 x'\hat{i}' - 2m\Omega_0\dot{x}'\hat{j}'$$

juntamos los términos que acompañen a un mismo vector unitario para obtener las ecs. escalares

$$\hat{i}') \quad m\ddot{x}' = -k(x' - l_0) + m\Omega_0^2 x' \quad (1)$$

$$\hat{j}') \quad m\ddot{y}' = -2ml_0\Omega_0^2 + N - 2m\Omega_0\dot{x}' \quad (2)$$

Para que el punto D sea punto de equilibrio, ahí la suma de "fuerzas" en el eje $\hat{i}'$ debe ser 0, que es equivalente a decir que la aceleración $\ddot{x}'$ sea 0 en $x' = D = 2l_0$

$$(1) \Rightarrow 0 = -k(2l_0 - l_0) + m\Omega_0^2 2l_0 \Rightarrow kl_0 = 2ml_0\Omega_0^2 \Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Ya con el valor de Ω_0 manipulamos (1) para que quede con la forma de un oscilador armónico

$$\Rightarrow m\ddot{x}' = x'(m\Omega_0^2 - k) + kl_0 \Rightarrow \ddot{x}' + \frac{k - m\Omega_0^2}{m} x' - \frac{kl_0}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' + \frac{k - m\Omega_0^2}{m} \left(x' - \frac{kl_0}{m(k - m\Omega_0^2)} \right) = 0$$

$$\ddot{x}' + \omega^2 \left(x' + \frac{kl_0}{m\Omega_0^2 - k} \right) = 0 \quad / \quad \omega^2 = \frac{k - m\Omega_0^2}{m}$$

Hacemos el cambio de variable $z' = x' + kl_0/(m\Omega_0^2 - k) \Rightarrow \ddot{z}' = \ddot{x}'$

$$\Rightarrow \ddot{z}' + \omega_0^2 z' = 0$$

con esta forma de oscilador, sabemos que el periodo se calcula como $T = 2\pi/\omega_0$.

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - m\Omega_0^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - mk/2m}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

b. Sabemos que antes que se despegue la masa de la pared BC, no hay movimiento en el eje $\hat{j}'$ (solo se mueve en $\hat{i}'$), por lo que (2) queda como

$$0 = 2mb_0\Omega_0^2 + N - 2m\Omega_0 \dot{x}'$$

y la condición para que se separe la masa de la pared es que no haya contacto con esta, o sea, $N=0$, como nos interesa el momento preciso en el que se separa, consideramos ambas condiciones (se cumple en un mismo tiempo $N=0$ y $\ddot{y}'=0$)

$$\Rightarrow 0 = -2mb_0\Omega_0^2 - 2m\Omega_0 \dot{x}'_f \Leftrightarrow \dot{x}'_f = -b_0\Omega_0$$

con lo que obtenemos la velocidad en el punto en el que se separa la masa. Ahora usamos (1) que integramos con truco de mecánica

$$\Rightarrow m \dot{x}' \frac{d\dot{x}'}{dx'} = -k(x' - b_0) + m\Omega_0^2 x' \quad \bigg/ \int_{x'_0}^{x'_f} dx' \Rightarrow m \int_{x'_0}^{x'_f} \dot{x}' dx' = -k \int_{x'_0}^{x'_f} x' dx' + kb_0 \int_{x'_0}^{x'_f} dx' + m\Omega_0^2 \int_{x'_0}^{x'_f} x' dx'$$

donde $\dot{x}'_0 = 0$, $\dot{x}'_f = -b_0\Omega_0$, $x'_0 = 4b_0$ y $x'_f = C$?

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \dot{x}'^2 \bigg|_{x'_0}^{x'_f} = \frac{m\Omega_0^2 - k}{2} x'^2 \bigg|_{x'_0}^{x'_f} + kb_0 x' \bigg|_{x'_0}^{x'_f}$$

$$\frac{m}{2} b_0^2 \Omega_0^2 = \frac{m\Omega_0^2 - k}{2} (x'_f{}^2 - 16b_0^2) + kb_0(x'_f - 4b_0)$$

$$x'_f{}^2 + \frac{2kb_0}{m\Omega_0^2 - k} x'_f - 16b_0^2 - \frac{8kb_0^2}{m\Omega_0^2 - k} - \frac{mb_0^2\Omega_0^2}{m\Omega_0^2 - k} = 0$$

$$x'_f{}^2 - 4b_0 x'_f - 16b_0^2 - \frac{8kb_0^2}{mk} \frac{2m}{k} + \frac{2mb_0^2}{k} \frac{k}{2m} = 0$$

$$x'_f{}^2 - 4b_0 x'_f + b_0^2 = 0 \Rightarrow x'_f = \frac{4b_0 \pm \sqrt{16b_0^2 - 4b_0^2}}{2} = 2b_0 \pm b_0\sqrt{3} = b_0(2 \pm \sqrt{3})$$

Como parte en $C = 4b_0$, se toma el valor más grande de x'_f

$$\therefore x'_f = b_0(2 + \sqrt{3})$$