Auxiliar 19

P1

[Como NO resolver este problema]

Inocentemente vamos directamente cual caballo a integrar la ecuación de movimiento ó la energía

$$m\left((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta}\right)=-\frac{GmM}{\rho^2}\hat{\rho}$$

$\hat{\rho})$ $$\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2=-\frac{GM}{\rho^2}$$

$\hat{\theta})$ $m\rho^2\dot{\theta}=\ell$, constante

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2=\frac{\ell^2}{m^2\rho^4}$$

$\Rightarrow \hat{\rho})$ $$\ddot{\rho}-\frac{\ell^2}{m^2\rho^3}=-\frac{GM}{\rho^2} \quad \Big/ \int d\rho$$

$$\int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}}\dot{\rho}\,d\dot{\rho}=\frac{\ell^2}{m^2}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^3}-GM\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2}{2}=-\frac{\ell^2}{2m^2}\frac{1}{\rho^2}+GM\frac{1}{\rho}+c$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt}=\sqrt{-\frac{\ell^2}{m^2}\frac{1}{\rho^2}+2GM\frac{1}{\rho}+2c} \quad \Big/ \int dt$$

$$\Rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{2c\rho^2+2GM\rho-\ell^2/m^2}}=\int_0^t dt$$

Pero esta integral no es nada bonita...

```
Integrate[x / Sqrt[2 * γ * x ^ 2 + 2 * β * x - α], x]
```

$$\frac{2\sqrt{\gamma}\,(-\alpha+2x(\beta+x\gamma))-\beta\sqrt{-2\alpha+4x(\beta+x\gamma)}\ \mathrm{ArcTanh}\left[\frac{\beta+2x\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}\sqrt{-\alpha+2x(\beta+x\gamma)}}\right]}{4\gamma^{3/2}\sqrt{-\alpha+2x(\beta+x\gamma)}}=t+C_3$$

A esto le sumamos que nos piden $\rho(\theta)$, así que faltaría calcular $\theta=\theta(t)$ con

$$\dot{\theta}=\frac{\ell}{m\rho^2(t)} \quad \Big/ \int dt$$

$$\Rightarrow \theta(t)=\frac{\ell}{m}\int\frac{dt}{\rho^2(t)}+C_2$$

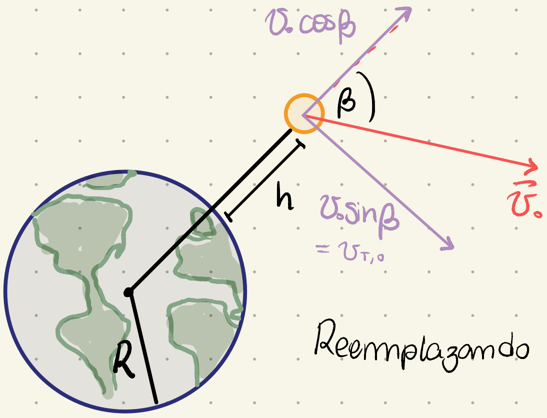
así que por ahí no va...

[Como sí resolverlo]

A partir de la ec. de Binet podemos obtener la expresión

$$r(\theta) = \frac{\tilde{R}}{1 + e\cos\theta}$$

así que solo necesitaríamos calcular $\tilde{R}$ y e con sus fórmulas respectivas, para esto necesitamos calcular la energía mecánica (que se conserva) y el momentum angular (")



- $E = E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GmM}{R+h}$

- $\ell = m\rho_0^2\dot{\theta}_0 = m\rho_0 v_{T,0}$

$$= m(R+h)\, v_0 \sin\beta$$

Reemplazando

- $\tilde{R} = \frac{\cancel{m^2}(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta}{GM\cancel{m^2}} = \frac{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta}{GM}$

- $e^2 = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 - \frac{G\cancel{m}M}{R+h}\right)\frac{\cancel{m^2}(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta}{(GM)^2\cancel{m^3}}$

$$= 1 + \left(v_0^2 - \frac{2GM}{R+h}\right)\frac{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta}{(GM)^2}$$

Así que la trayectoria (el radio parametrizado por el ángulo) es

$$r(\theta) = \frac{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta / GM}{1 + \left[\sqrt{1 + \left(v_0^2 - \frac{2GM}{R+h}\right)\frac{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta}{(GM)^2}}\right]\cos\theta}$$

Algunos ejemplos de órbitas

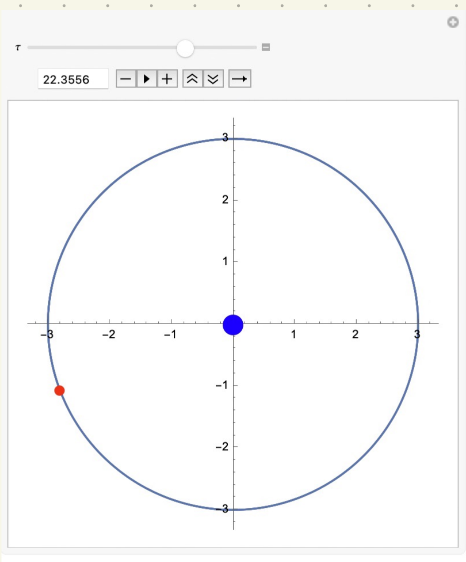


Fig 1: $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ y $\beta = \pi/2$

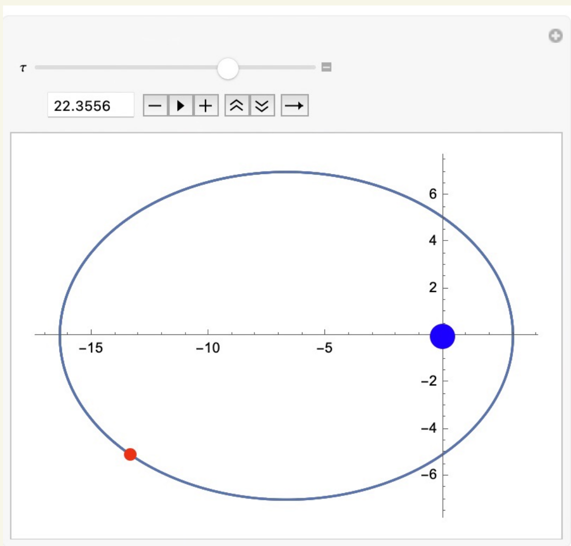


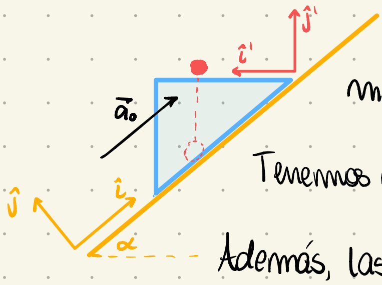
Fig 2: $v_0 = 1.3\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ y $\beta = \pi/2$

Código

https://github.com/Wenupi/FI2001-2022-2

P2

Definimos el SRNI con origen en el extremo superior derecho de la cuña (donde comienza la bolita) que se mueve de forma acelerada c/r a la rampa, que es un SRI al estar quieto. Definimos el origen del SRI en la parte inferior de la rampa, con el eje $\hat{\imath}$ paralelo a la rampa



Como los sist's siempre está alineados, no rotan c/r a ellos $\vec{\Omega}=0$, lo que simplifica mucho la expresión

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}} \quad (1)$$

Tenemos que $\ddot{\vec{R}} = a_0\hat{\imath}$ que debemos describir en el SRNI

$$\ddot{\vec{R}} = a_0(-\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{\jmath})$$

Además, las fuerzas reales actuando sobre la masa, son: la gravedad y la normal de la cuña

$$\Rightarrow m\vec{a} = -mg\hat{\jmath}' + N\hat{\jmath}'$$

Así que (1) nos queda como

$$m(\ddot{x}'\hat{\imath}' + \ddot{y}'\hat{\jmath}') = -mg\hat{\jmath} + N\hat{\jmath} - ma_0(-\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{\jmath}')$$

y las ecs. escalares

$$\hat{\imath}')\quad m\ddot{x}' = ma_0\cos\alpha$$

$$\hat{\jmath}')\quad m\ddot{y}' = -mg\hat{\jmath}' + N\hat{\jmath} - ma_0\sin\alpha\,\hat{\jmath}'$$

Solo nos interesa $\hat{\imath}')$, ya que queremos saber cuándo llega al borde (mov. horizonta), así que trabajamos esta expresión

$$m\int_{\dot{x}_0'}^{\dot{x}'} d\dot{x}' = ma_0\cos\alpha\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow m\dot{x}' = ma_0\cos\alpha\, t$$

$$\Rightarrow m\int_{x_0'}^{x'} dx' = ma_0\cos\alpha\int_0^t t\,dt$$

$$\Leftrightarrow m\,x'(t) = ma_0\cos\alpha\,\frac{t^2}{2}$$

donde consideramos que parte en el origen del SRNI (es arbitrario) y parte con velocidad nula.

Así que veamos cuándo $x'(t^*) = D$

$$\Rightarrow mD = ma_0\cos(\pi/4)\,\frac{t^{*2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^{*2} = \frac{2D}{a_0\cos\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}D}{a_0} \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}D}{a_0}}$$