

Auxiliar 18

P1

Como tenemos una fuerza central, se conserva la energía mecánica así que calculamos el potencial como

$$U = - \int_r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_r \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

* Considerando la masa de q_2 como 0, no hay fuerza gravitacional. Sería fácil agregarla ya que es igual que la de Coulomb, pero con otra constante

Tenemos que inicialmente la partícula q_1 tiene velocidad v_0 y como es lanzada desde muy lejos, en ese momento no siente la interacción con q_2 , ya que

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Así que

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(r=\infty) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

si consideramos la masa de q_1

Mientras que para el momento final (en el momento que q_1 está a $r_{\min}$ de q_2), usamos el mismo argumento que hemos ocupado en los otros auxiliares:

" $U(r_{\min})$ es mínimo, por lo que K es máximo y $\dot{r}=0$ "

ver aux 15 si no queda claro

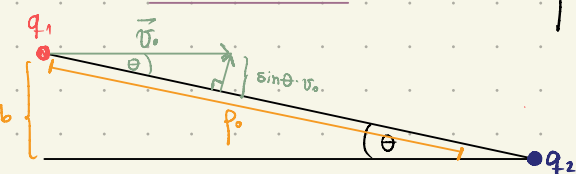
Escribiendo $|\vec{v}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$ y como se conserva el momento angular

Condición inicial

$$p^2 \dot{\theta} = p_0 v_{r,0}$$

$$= p_0 v_0 \sin \theta$$

$$= p_0 v_0 \frac{b}{p_0} = v_0 b$$



$$\Rightarrow |\vec{v}_f|^2 = \dot{r}^2 + r_{\min}^2 \left(\frac{v_0 b}{r_{\min}^2} \right)^2 = \frac{v_0^2 b^2}{r_{\min}^2}$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2 b^2}{r_{\min}^2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{\min}}$$

Usando conservación de E

$$\Rightarrow E_0 = E_f$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2 b^2}{r_{\min}^2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{\min}}$$

/ $\cdot r_{\min}^2$

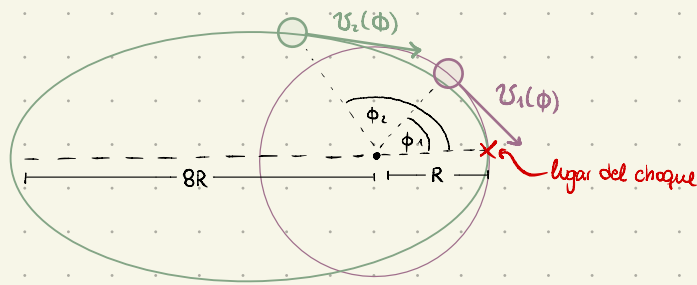
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 \cdot r_{\min}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 b^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot r_{\min}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot r_{\min}^2 + b \cdot r_{\min} + c = 0$$

$$\Rightarrow r_{\min 1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{lo reemplazamos ustedes}$$

P2

Con la info. que nos entregan sabemos de qué órbita se trata y podemos calcular la energía de cada satélite antes del choque.



Para S_1 tenemos que al tratarse de una órbita circular $e_1 = 0$ (excentricidad)

$$\Rightarrow 0 = 1 + \frac{2E_1 l_1^2}{(GM_\odot)^2 m^3}$$

$$\Rightarrow E_1 = - \frac{(GM_\odot)^2 m^3}{2 l_1^2}$$

debemos calcularlo

Como es circular, $\tilde{R} = R$ (ver formulario), además

$$\tilde{R} = \frac{l_1^2}{GM_\odot m^2} = R$$

$$\Leftrightarrow l_1^2 = GM_\odot m^2 R$$

Reemplazando en la energía

$$\Rightarrow E_1 = - \frac{(GM_\odot)^2 m^3}{2 GM_\odot m^2 R} = - \frac{1}{2} \frac{GM_\odot m}{R}$$

Expresando la energía en su forma general, pero evaluada en el lugar de la colisión ($\phi = 0 \wedge r = R$)

$$E_1 = K_1 - \frac{GM_\odot m}{R} = - \frac{1}{2} \frac{GM_\odot m}{R}$$

$$\Leftrightarrow K_1 = \frac{1}{2} \frac{GM_\odot m}{R}$$

Para S_2 conoceremos las distancias mínima y máxima al foco, además tenemos la relación

$$\boxed{r_{\min}} = \frac{\tilde{R}}{1+e} \quad \wedge \quad \boxed{r_{\max}} = \frac{\tilde{R}}{1-e} \quad \left\{ \text{salon de evaluar } r(\phi) \text{ en } \phi=0 \text{ y } \phi=\pi \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{R} = \frac{\tilde{R}}{1+e_2} \quad \wedge \quad \boxed{8R} = \frac{\tilde{R}}{1-e_2}$$

$$\Rightarrow R(1+e_2) = 8R(1-e_2)$$

$$\Leftrightarrow 9Re_2 = 7R$$

$$\Leftrightarrow e_2 = \frac{7}{9}$$

obteniendo el parámetro $\tilde{R} \Rightarrow R = \frac{\tilde{R}}{1+7/9} \Leftrightarrow \frac{16}{9} R = \tilde{R}$

Por lo que la energía está dada por

$$\frac{49}{81} = 1 + \frac{2E_2 l_z^2}{(GM_\odot)^2 m^3} \Leftrightarrow E_2 = -\frac{32}{81} \frac{(GM_\odot)^2 m^3}{2l_z^2}$$

También tenemos la relación $\tilde{R} = \frac{l_z^2}{GM_\odot m^2} \Rightarrow l_z^2 = \frac{16}{9} R GM_\odot m^2$

$$\Rightarrow E_2 = -\frac{16}{81} \frac{(GM_\odot)^2 m^3}{GM_\odot m^2} \frac{9}{16R} = -\frac{1}{9} \frac{GM_\odot m}{R}$$

Ocupando la expresión general de E , evaluada en el lugar del choque $\phi=0 \wedge r=R$

$$E_2 = K_2 - \frac{GM_\odot m}{R} = -\frac{1}{9} \frac{GM_\odot m}{R}$$

$$\Leftrightarrow K_2 = \frac{8}{9} \frac{GM_\odot m}{R}$$

[Post colisión] En las colisiones se conserva el momentum, pero no la energía mecánica, así que

$$m v_1 + m v_2 = (m+m) v_{12} \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 2 v_{12}$$

← forman un solo cuerpo

de la parte anterior podemos obtener estos términos

$$\bullet K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{GM_\odot m}{R} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}$$

$$\bullet K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{8}{9} \frac{GM_\odot m}{R} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{16}{9} \frac{GM_\odot}{R}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}$$

Reemplazando $\sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} = 2 v_{1,2}$

$$\Rightarrow v_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} + \frac{1}{2} \frac{4}{3} \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}}$$

$$\Rightarrow K_{1,2} = \frac{1}{2} m \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{8} m \left(\frac{GM_\oplus}{R} + \frac{8}{3} \frac{GM_\oplus}{R} + \frac{4}{3} \frac{GM_\oplus}{R} \right)$$

$$= \frac{1}{8} m \frac{GM_\oplus}{R} \left(1 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} \right)$$

$$= \frac{5}{8} \frac{GM_\oplus m}{R}$$

y la suma de K_1 y K_2

$$K_1 + K_2 = \frac{1}{2} \frac{GM_\oplus m}{R} + \frac{8}{9} \frac{GM_\oplus m}{R} = \frac{25}{18} \frac{GM_\oplus m}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{K_{1,2}}{K_1 + K_2} \approx 0.45 \Rightarrow K_1 + K_2 > K_{1,2}$$

b) Calculemos la energía mecánica del nuevo objeto (esta energía se conserva después del choque)

$$E_{1,2} = \frac{5}{8} \frac{GM_\oplus m}{R} - \frac{GM_\oplus 2m}{R} \quad \leftarrow U_{1,2} (r=R)$$

$$= -1.375 \frac{GM_\oplus m}{R} < 0$$

∴ La órbita es una elipse ($E < 0$).

Con la energía calculada, y pudiendo calcular el momento angular conservado

$$m R v_{1,2} = \ell_{1,2}$$

pueden calcular la excentricidad.