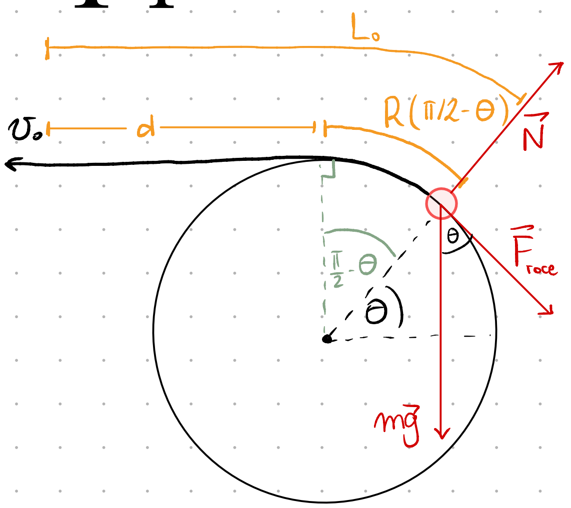
Control 2

P1



Encontremos la velocidad de la partícula en función de v_0.

Para esto podemos decir que la cuerda mide L_0 (no conocemos este valor, pero no importa)

$$\Rightarrow L_0 = d + R(\pi/2-\theta) \quad / \frac{d}{dt}\text{, derivamos}$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{d} - R\dot{\theta}$$

$$= v_0 - R\dot{\theta} \Rightarrow R\dot{\theta} = v_0$$

Ahora ocupamos Newton considerando las fuerzas y polares: Normal, peso, roce y tensión

$$m((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\hat{\theta}) = N\hat{\rho} - \mu N\hat{\theta} - mg\sin\theta\hat{\rho} - mg\cos\theta\hat{\theta} + T\hat{\theta}$$

con $\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ y $\dot{\theta} = v_0/R \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$\hat{\rho}) \quad -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\sin\theta$$

$$\hat{\theta}) \quad \cancel{mR\ddot{\theta}} = 0 = -\mu N - mg\cos\theta + T$$

$$\hat{\rho}) \rightarrow -mR\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = N - mg\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow N = mg\sin\theta - m\frac{v_0^2}{R}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{roce} = -\mu\left(mg\sin\theta - m\frac{v_0^2}{R}\right)\hat{\theta}$$

a) La energía sería de la forma $E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + U_g(\theta)$ donde $U(\theta) = mgh = mgR\sin\theta$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \quad \Big\} \text{ energía inicial } \theta = 0$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR \quad \Big\} \text{ energía final } \theta = \pi/2 \qquad \Rightarrow \Delta E = E_f - E_0 = mgR$$

b) $$W_{0,\pi/2} = \int_0^{\pi/2} \vec{F}_{roce}(\theta)\cdot d\vec{r} = -\mu\int_0^{\pi/2}\left(mg\sin\theta - m\frac{v_0^2}{R}\right)\hat{\theta}\cdot(d\rho\hat{\rho} + \rho d\theta\hat{\theta})$$

$$= -\mu\int_0^{\pi/2} mg\sin\theta R\,d\theta + \mu m\frac{v_0^2}{R}\int_0^{\pi/2} R\,d\theta$$

$$= \mu m g R \cos\theta \Big|_0^{\pi/2} + \mu m v_0^2 \frac{\pi}{2}$$

$$= -\mu m g R + \frac{\pi}{2} \mu m v_0^2$$

c) Para el trabajo de la tensión podemos hacerlo igual que para b) y utilizando la expresión que saldría de $\hat{\theta}$)

$$\vec{T} = (mg\cos\theta + \mu N)\hat{\theta}$$

$$= \left(mg\cos\theta + \mu\left(mg\sin\theta - \frac{m v_0^2}{R}\right)\right)\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow W_T = \int_0^{\pi/2} \vec{T}(\theta)\cdot d\vec{r} = \ldots = mgR + \mu m g R - \frac{\pi}{2}\mu m v_0^2$$

O podemos usar que de a) sabemos que todos los trabajos producidos por las fuerzas no conservativas sumados dan la variación de la energía mecánica (la normal no hace trabajo)

$$\Rightarrow \Delta E = W_{roce} + W_{Tensión} = mgR$$

$$\Rightarrow W_T = mgR - \left(-\mu m g R + \frac{\pi}{2}\mu m v_0^2\right)$$

$$= mgR + \mu m g R - \frac{\pi}{2}\mu m v_0^2$$

P2

a) Como $\vec{F}(r) = F_0\hat{\rho} \Rightarrow U(\rho) = -\int^{\rho} F_0 d\rho = -F_0\rho$

b) Por lo que la energía sería $E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}k(\rho - l_0) - F_0\rho$

$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}m v_0^2 - F_0 l_0$] energía inicial $\rho = l_0 \wedge |\vec{v}| = v_0$

Para que $2l_0 = \rho_{máx}$ necesitamos imponer $\dot{\rho}(\rho = 2l_0) = 0$

$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}m(\cancel{\dot{\rho}^2} + \underbrace{\cancel{\rho\dot{\theta}^2}}_{\text{no hay mov. angular}}) + \frac{1}{2}k l_0^2 - 2F_0 l_0$] energía final $\rho = 2l_0 \wedge \dot{\rho} = \dot{\theta} = 0$

$= \frac{1}{2}k l_0^2 - 2F_0 l_0$

$\Rightarrow E_0 = E_f \Leftrightarrow \frac{1}{2}m v_0^2 - F_0 l_0 = \frac{1}{2}k l_0^2 - 2F_0 l_0$] conservación energía

$\frac{1}{2}m v_0^2 = \frac{1}{2}k l_0^2 - F_0 l_0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k l_0^2}{m} - \frac{2F_0 l_0}{m}}$

c) Si v_0 es perpendicular, tendremos un momentum angular conservado t.q.

$\Rightarrow \rho^2\dot{\theta} = \rho_0^2\dot{\theta}_0$

$= \rho_0(\rho_0\dot{\theta}_0)$

$= l_0 \cdot v_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l_0 v_0}{\rho^2}$

*Solo hay fuerzas en $\hat{\rho}$, nada en $\hat{\theta}$, por lo que se conserva el momentum angular

$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}m\frac{l_0^2 v_0^2}{(2l_0)^2} + \frac{1}{2}k l_0^2 - 2F_0 l_0$] energía final $\rho = 2l_0 \wedge \dot{\rho} = 0 \wedge \dot{\theta} = \frac{l_0 v_0}{\rho^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m v_0^2 - F_0 l_0 = \frac{1}{8}m v_0^2 + \frac{1}{2}k l_0^2 - 2F_0 l_0$] conservación energía

$\Leftrightarrow \frac{3}{8}m v_0^2 = \frac{1}{2}k l_0^2 - F_0 l_0$

$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{4k l_0^2}{3m} - \frac{8}{3}\frac{F_0 l_0}{m}}$