

Auxiliar 15

P1

Separamos el problema en 2 momentos, antes y después del impulso, en ambos casos solo existe la fuerza central (por lo tanto conservativa)

$\vec{F} = -k p \hat{p}$, calculamos su energía potencial asociada

$$\Rightarrow U = -\int^p -k p' dp' = \frac{k p^2}{2} + U_0$$

donde podemos elegir la const. de integración $U_0 = 0$

$$\Rightarrow U(p) = \frac{k p^2}{2} \Rightarrow E = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + \frac{k p^2}{2}$$

a) [Primera parte del mov.]

Se conserva la energía mecánica e inicialmente tenemos $p_0 = p_0$ y $|\vec{v}_0|^2 = 0$ y finalmente (justo antes del impulso), $p_f = p_0/2$ y $|\vec{v}_f|^2 = v_i^2$

$$E_0 = E_f$$

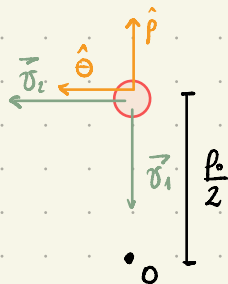
$$\Leftrightarrow \frac{k p_0^2}{2} = \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{k p_0^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow v_i^2 = \frac{2}{m} \cdot \frac{3}{8} k p_0^2 = \frac{3}{4} \frac{k}{m} p_0^2$$

b) [Segunda parte del mov.]

En el mov. anterior tuvimos un movimiento en línea recta (en la dirección $-\hat{p}$), ya que a la partícula no se le había impartido ninguna velocidad en $\hat{\theta}$, ahora si.

Tendríamos que la velocidad inicial de esta parte del mov. es



$$\vec{v}_0 = -v_i \hat{p} + v_\theta \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_0|^2 = v_i^2 + v_\theta^2, \text{ y por conservación de la energía}$$

$$E = \frac{1}{2} m (v_i^2 + v_\theta^2) + \frac{k p_0^2}{8} = \frac{1}{2} m (\dot{p}^2 + p^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k p^2}{2}$$

Al igual que en el Ejercicio 3, la velocidad máxima se tiene cuando se minimiza la energía potencial y esto se da cuando la partícula no se puede acercar más al centro de atracción, o sea $\dot{p} = 0$ *

Explicación abajo

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m (v_i^2 + v_\theta^2) + \frac{k p_0^2}{8} = \frac{1}{2} m p^2 \dot{\theta}^2 + \frac{k p^2}{2}$$

Para conseguir una expresión de $\dot{\theta}$ ocupamos conservación del momentum angular

$$p^z \dot{\theta} = p_{ini}^z \dot{\theta}_{ini} = \overbrace{p_{ini}^z}^{p_0/2} \overbrace{\dot{\theta}_{ini}}^{\omega_z} = \frac{p_0}{2} \omega_z$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{p_0^2 \omega_z^2}{4} \frac{1}{p^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) + \frac{k p_0^2}{8} = \frac{1}{2} m \frac{p_0^2 \omega_z^2}{4} \frac{1}{p^2} + \frac{k p^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{k}{2} p^4 - \left[\frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) + \frac{k p_0^2}{8} \right] p^2 + \frac{1}{8} m p_0^2 \omega_z^2$$

hacemos el c.v. $x = p^2 \Rightarrow 0 = \frac{k}{2} x^2 - \left[\frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) + \frac{k p_0^2}{8} \right] x + \frac{1}{8} m p_0^2 \omega_z^2$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

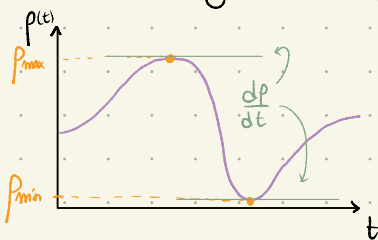
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = p_{1,2}^2$$

donde tendríamos que $p_1^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = p_{max}^2$ y $p_2^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = p_{min}^2$ (el que buscamos)

$$\Rightarrow v_{max} = p_{min} \dot{\theta} (p = p_{min})$$

$$= \frac{p_0 \omega_z}{2} \frac{1}{p_{min}}$$

* Se tiene eso, ya que un gráfico de p vs t sería de forma general

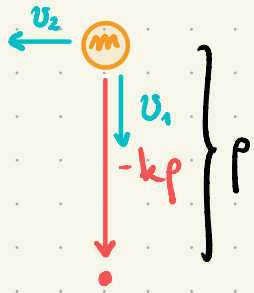


Donde vemos que para maximizar o minimizar p , debemos imponer que la pendiente sea nula

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \dot{p} = 0$$

P1 con Newton

Aunque al comienzo es un movimiento unidimensional, usaremos un sist. de coord. polares, ya que solo tenemos una fuerza central, por ende, un mov. en un plano.



$$m \left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \hat{\theta} \right) = -k \frac{\hat{r}}{r^2}, \text{ con lo que obtenemos}$$

$$\hat{r}) m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k/r \quad (1); \quad \hat{\theta}) \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (2) \quad \text{conservación}$$

a) Como en la primera parte el movimiento es solo en $\hat{r} \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, por lo que integramos (1)

$$(1) \rightarrow \ddot{r} = -\frac{k}{m} r \quad / \int dr \text{ y truco mecánica}$$

$$\int_{\dot{r}}^{\dot{r}} \dot{r} d\dot{r} = -\frac{k}{m} \int_{r_0}^r r dr \quad / \text{por enunciado } \dot{r}_0 = 0 \wedge r_0 = r_0$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = -\frac{k}{2m} (r^2 - r_0^2) \quad (3)$$

y notamos que $v_1 = \dot{r}(r=r_0/2)$, evaluemos en (3)

$$\Rightarrow \frac{\dot{r}^2}{2}(r_0/2) = -\frac{k}{2m} \left(\frac{r_0^2}{4} - r_0^2 \right) = \frac{k}{2m} \cdot \frac{3}{4} r_0^2 = \frac{3}{8} \frac{k}{m} r_0^2 \Rightarrow v_1 = r_0 \sqrt{\frac{3k}{4m}}$$

b) Luego de aplicada la velocidad v_2 , se mantienen las ecs. de movimiento, solo cambian las condiciones iniciales.

Usamos la conservación del momento angular (2) para obtener $\dot{\theta}(r)$

$$(2) \rightarrow r^2 \dot{\theta} = r_{in}^2 \dot{\theta}_0 = r_{in}^2 v_2 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{r_0 v_2}{2 r^2}, \text{ reemplazamos en (1)}$$

$$\Rightarrow m \left(\ddot{r} - r \frac{r_0^2 v_2^2}{4 r^4} \right) = m \left(\ddot{r} - \frac{r_0^2 v_2^2}{4 r^3} \right) = -k/r$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r} = \frac{r_0^2 v_2^2}{4} \frac{1}{r^3} - \frac{k}{m} r \quad / \int dr \text{ y truco mecánica}$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{r}}^{\dot{r}} \dot{r} d\dot{r} = \frac{r_0^2 v_2^2}{4} \int_{r_0/2}^r \frac{dr}{r^3} - \frac{k}{m} \int_{r_0/2}^r r dr \quad / \dot{r}_0 = v_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = \frac{r_0^2 v_2^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{4}{r_0^2} \right) - \frac{k}{2m} \left(r^2 - \frac{r_0^2}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} - \frac{r_0^2 v_2^2}{8} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{4}{r_0^2} \right) - \frac{k}{2m} \left(r^2 - \frac{r_0^2}{4} \right)$$

Con esto podemos calcular la distancia máxima y mínima imponiendo $\dot{r} \stackrel{!}{=} 0$, o sea, que la masa deje de alejarse o acercarse respectivamente

$$\dot{r} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{v_1^2}{2} - \frac{r_0^2 v_2^2}{8} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{4}{r_0^2} \right) - \frac{k}{2m} \left(r^2 - \frac{r_0^2}{4} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad / \cdot r^2$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{2} p^2 - \frac{p_0^2 v_2^2}{8} \left(1 - \frac{4}{p_0^2} p^2 \right) - \frac{k}{2m} \left(p^4 - \frac{p_0^4}{4} p^2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2m} p^4 - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} \right) p^2 + \frac{p_0^2 v_2^2}{8} = 0$$

Hacemos el cambio de variable $x = p^2$

$$\Rightarrow \frac{k}{2m} x^2 - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} \right) x + \frac{p_0^2 v_2^2}{8} = 0$$

que es una ecuación cuadrática y tiene dos soluciones $x_{+,-}$, donde tomamos x_- que es tomando el signo negativo de la sol. de la ec. cuadrática, luego $p_{\min} = \sqrt{x_-}$ y por conservación del momentum angular

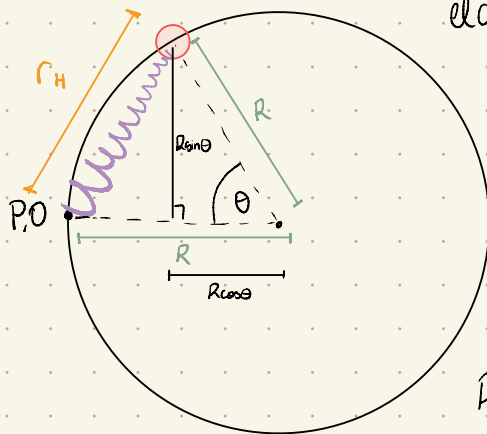
$$v_T = \frac{L}{m p}$$

tenemos que si p es mínimo, la velocidad es máxima.

* Importante notar la diferencia en la longitud y complejidad del cálculo, en comparación a usar energía.

P2

[Vista desde arriba]



Para este problema primero debemos encontrar la distancia desde la partícula al punto O, en función del ángulo θ , para así poder calcular la fuerza elástica.

Por dibujo tenemos que

$$\begin{aligned} r_H^2 &= (R - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta \\ &= R^2 - 2R^2 \cos \theta + R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta \\ &= 2R^2 - 2R^2 \cos \theta = R^2(2 - 2 \cos \theta) \end{aligned}$$

Por lo que la distancia r sería

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + R^2(2 - 2 \cos \theta) \\ &= R^2(3 - 2 \cos \theta) \end{aligned}$$

Así que la fuerza elástica sería (eligiendo un sist. en esfericas centrado en O)

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -k(r - l_0) \hat{r} \\ &= -k(r - \beta R) \hat{r} \end{aligned}$$

Calculamos la energía potencial con $\vec{F} = -\nabla U$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= -\int^r -k(r - \beta R) dr = \frac{k}{2}(r - \beta R)^2 \\ &= \frac{k}{2}(R\sqrt{3 - 2 \cos \theta} - \beta R)^2 \\ &= \frac{kR^2}{2}(\sqrt{3 - 2 \cos \theta} - \beta)^2 \end{aligned}$$

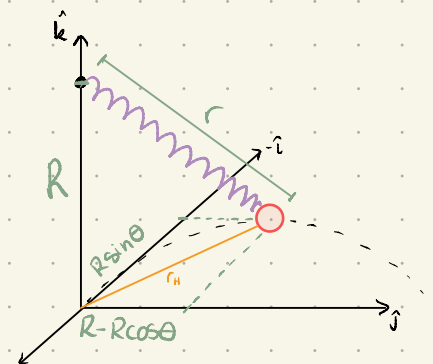
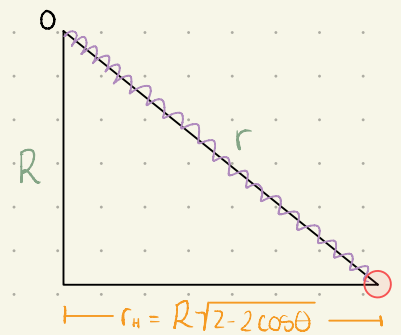


Fig 2: De aquí se ve que $r^2 = R^2 + (R - R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2$



Ahora, elegimos un sist. coord. polares centrado en el centro del anillo. Expresamos la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 + U(\theta) = \frac{1}{2} \underbrace{m R^2}_{\alpha} \dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{kR^2}{2}(\sqrt{3 - 2 \cos \theta} - \beta)^2}_{U_{eff}}$$

Encontramos los puntos de equilibrio

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta} = kR^2(\sqrt{3 - 2 \cos \theta} - \beta) \frac{1}{2} \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{3 - 2 \cos \theta}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow (\sqrt{3 - 2 \cos \theta} - \beta) \sin \theta \stackrel{!}{=} 0$$

por lo que tenemos puntos de eq. cuando $\sin \theta \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \theta_0 = 0, \pi$ y cuando

$$\sqrt{3-2\cos\theta} - \beta \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 3-2\cos\theta = \beta^2$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{3-\beta^2}{2}$$

$$\text{Como } \cos\theta \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{3-\beta^2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 3-\beta^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq -\beta^2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 5 \geq \beta^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \geq \beta \geq 1$$

b) Derivamos de nuevo

$$\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(kR^2 (\sqrt{3-2\cos\theta} - \beta) \frac{\sin\theta}{\sqrt{3-2\cos\theta}} \right)$$

$$= kR^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta - \beta \frac{\sin\theta}{\sqrt{3-2\cos\theta}} \right)$$

$$= kR^2 \left(\cos\theta - \beta \left(\cos\theta \sqrt{3-2\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3-2\cos\theta}} \right) \frac{1}{3-2\cos\theta} \right)$$

$$\text{Para } \theta=0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = kR^2 \left(1 - \beta(1\sqrt{1} - 0) \frac{1}{1} \right)$$

$$= kR^2(1-\beta)$$

$$\text{Para } \theta=\pi \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\pi} = kR^2 \left(-1 - \beta(-\sqrt{5} - 0) \frac{1}{5} \right)$$

$$= kR^2 \left(-1 + \beta \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

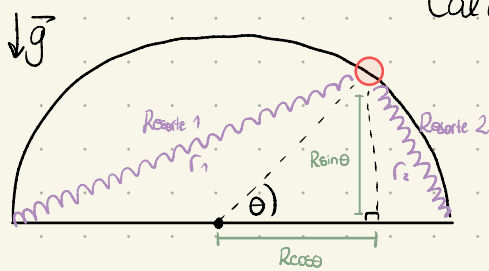
i) P estable $\rightarrow 1-\beta > 0 \Leftrightarrow 1 > \beta$ y Q inestable $\rightarrow -1 + \frac{\beta}{\sqrt{5}} < 0 \Leftrightarrow \beta < \sqrt{5}$

ii) P inestable $\rightarrow 1-\beta < 0 \Leftrightarrow 1 < \beta$ y Q estable $\rightarrow -1 + \frac{\beta}{\sqrt{5}} > 0 \Leftrightarrow \beta > \sqrt{5}$

c) Como la energía es de la forma $E = \frac{\alpha \dot{\theta}^2}{2} + U_{\text{eff}}(\theta) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{U_{\text{eff}}''(\theta)}{\alpha}}$. En este caso

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{\overbrace{kR^2(1-\beta)}^{U_{\text{eff}}''(\theta=0)}}{mR^2} = \frac{k}{m}(1-\beta)$$

P3



Calculando las distancias desde el origen de cada resorte a la partícula

$$r_1^2 = (R - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta = 2R^2 - 2R^2 \cos \theta$$

$$r_2^2 = (R + R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta = 2R^2 + 2R^2 \cos \theta$$

Por lo que las energías potenciales elástica serían:

$$U_1(\theta) = \frac{1}{2} k (r_1 - l_0)^2 = \frac{1}{2} k (R\sqrt{2-2\cos\theta} - l_0)^2$$

$$U_2(\theta) = \frac{1}{2} k (r_2 - l_0)^2 = \frac{1}{2} k (R\sqrt{2+2\cos\theta} - l_0)^2$$

$$* R = D/2$$

y la energía mecánica sería de la forma

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} k (R\sqrt{2-2\cos\theta} - l_0)^2 + \frac{1}{2} k (R\sqrt{2+2\cos\theta} - l_0)^2}_{U_{eff}} + mgR \sin \theta$$

Calculamos los pto. de eq.

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} k \left[2(R\sqrt{2-2\cos\theta} - l_0) \frac{R \sin \theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}} - 2(R\sqrt{2+2\cos\theta} - l_0) \frac{R \sin \theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}} \right] + mgR \cos \theta \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{R^2 \sin \theta} - \frac{l_0 R \sin \theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}} - \cancel{R^2 \sin \theta} + \frac{l_0 R \sin \theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}} + \frac{mgR \cos \theta}{k} = 0$$

Juntamos todo en una gran fracción multiplicando por $\sqrt{2-2\cos\theta} \sqrt{2+2\cos\theta} \cdot k = k\sqrt{4-4\cos^2\theta}$

$$\frac{1}{2\sqrt{4-4\cos^2\theta}} (-k l_0 \cancel{R} \sin \theta \sqrt{2+2\cos\theta} + k l_0 \cancel{R} \sin \theta \sqrt{2-2\cos\theta} + mg \cancel{R} \cos \theta \sqrt{2-2\cos\theta} \sqrt{2+2\cos\theta}) = 0$$

$$\Rightarrow -k l_0 \sin \theta (\sqrt{2+2\cos\theta} - \sqrt{2-2\cos\theta}) + mg \cos \theta \sqrt{2-2\cos\theta} \sqrt{2+2\cos\theta} = 0$$

donde por inspección notamos que se cumple para $\theta = \pi/2$, que sería nuestro punto de eq.

* El denominador es $\neq 0$ para $\theta = \pi/2$, por lo que todo bien.

Ahora, derivemos otra vez para imponer condiciones para la estabilidad

Usando el poder de la tecnología que claramente ustedes no pueden usar en control, llegamos a que

$$\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial \theta^2}(\theta = \pi/2) = \frac{1}{4} (2\sqrt{2} k l_0 - 4gm) R \stackrel{!}{>} 0$$

para que sea estable

$$\Rightarrow \text{necesitamos que } \sqrt{2} k l_0 > 2gm$$

O sea, tener resortes muy "fuertes" que hagan despreciable la fuerza peso

Luego la frecuencia de pequeñas oscilaciones se calcularía como

$$\omega_0^2 = \frac{U_{\text{eff}}''(\theta = \pi/2)}{\alpha} = \frac{1}{4} (2\sqrt{2} k l_0 - 4gm) R \cdot \frac{1}{mR^2}$$