



$$\Rightarrow f(0) = -\frac{2k}{m} < 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \text{ es inestable}$$

$$\Rightarrow f(\pi) = \frac{2k}{m} > 0 \Rightarrow \theta_0 = \pi \text{ es estable} \quad \left. \vphantom{\frac{2k}{m}} \right\} \text{ solo este puede tener} \\ \text{pequeñas oscilaciones}$$

b. Para calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones debemos perturbar  $\theta$  en torno a  $\pi$  donde  $y$  es pequeño ( $\theta \rightarrow \pi + y$ )

$$\triangleright \sin(\pi + y) = \cancel{\sin(\pi)} \cos(y) + \cancel{\cos(\pi)} \sin(y) \approx -y$$

$$\triangleright \cos(\pi + y) = \cancel{\cos(\pi)} \cos(y) - \cancel{\sin(\pi)} \sin(y) \approx -1$$

Por lo que la ec. de mov. queda ( $\ddot{\theta} = (\ddot{\pi} + \ddot{y}) = \ddot{y}$ )

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{2k}{m} y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{2k}{m} y = \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{2k}{m}} \right\} \text{ mov. armónico simple}$$

Así que la frecuencia de pequeñas oscilaciones es  $\omega = \sqrt{2k/m}$

Segundo método (este se evaluará):

La normal del tubo no ejerce trabajo. Calculamos el potencial asociado a la fuerza central.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\nabla U(r) \\ \Rightarrow -kr\hat{r} &= -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\hat{r} \quad \int dr \\ \Rightarrow U - U_0 &= \int_{r_0}^r kr dr \\ \Leftrightarrow U - U_0 &= \frac{kr^2}{2} + c \end{aligned}$$

Escogemos  $U_0$  tq.  $\rightarrow U(r) = \frac{kr^2}{2}$ . Así que la energía mecánica **conservada** queda como

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + \frac{k}{2}r^2 = \text{cte.}$$

donde  $\dot{r} = 0 \forall t$  y  $r = R \Rightarrow E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}R^2$

y debemos expresar  $r$  en nuestras coord. polares, anteriormente conseguimos

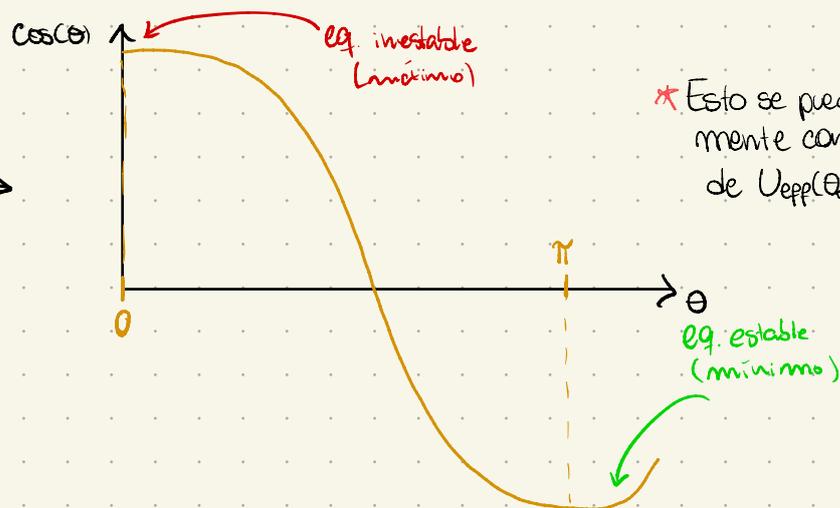
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{5R^2 + 4R^2 \cos\theta} \\ \Rightarrow E &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}R^2(5 + 4\cos\theta) \end{aligned}$$

este es el potencial efectivo

a. Para esta parte debemos encontrar donde el potencial es un mínimo (eq. estable) o un máximo (eq. inestable), para eso derivamos  $U(\theta)$  wrt al ángulo e igualamos a 0

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} \sim \sin\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 \in \{0, \pi\}$$

Analizamos si son estables o inestables



b. Tenemos que la energía es de la forma  $E = \frac{\alpha}{2}\dot{\theta}^2 + U(\theta)$ , por lo que la freq. de pequeñas oscilaciones está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(\theta_0)}{\alpha}}, \text{ donde}$$

$$\left. \frac{d^2 U}{d\theta^2} \right|_{\theta_0} = -2kR^2 \cos\theta_0 = 2kR^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2kR^2}{mR^2}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$