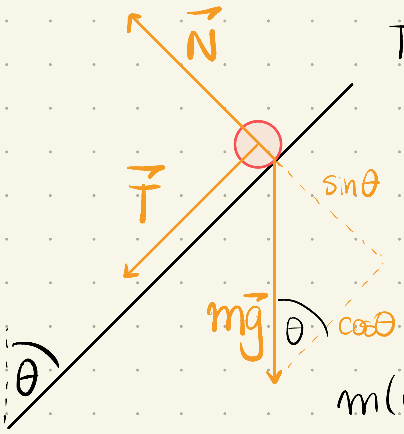
Auxiliar 13

P1



Tenemos 3 fuerzas
- Tensión: $\vec{T} = -T\hat{r}$
- Normal: $\vec{N} = -N\hat{\theta}$
- Peso: $m\vec{g} = mg\sin\theta\hat{\theta} - mg\cos\theta\hat{r}$

Y ocupamos esféricos porque es más facil describir la dirección de las fuerzas

$$m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)\hat{\phi}\right) = -T\hat{r} - N\hat{\theta} + mg\sin\theta\hat{\theta} - mg\cos\theta\hat{r}$$

Donde $\theta = \pi/3 \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

a) $\hat{r})$ $m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = -T - mg\cos\theta$

$\hat{\theta})$ $-mr\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -N + mg\sin\theta$

$\hat{\phi})$ $\dfrac{m}{r\sin\theta}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0$

Además tenemos que $r(t) = r_0 - v_0 t \Rightarrow \dot{r}(t) = -v_0 \Rightarrow \ddot{r} = 0$

$\hat{r})$ $-m(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2\sin^2\theta = -T - mg\cos\theta$

$\hat{\theta})$ $-m(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -N + mg\sin\theta$

$\hat{\phi})$ $\dfrac{d}{dt}\left((r_0 - v_0 t)^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0$

b) Para que el hilo esté tenso en $t=0$ imponemos $T(t=0) > 0$. De $\hat{\phi})$ tenemos

$$(r_0 - v_0 t)^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \ell = \text{constante}$$

$\Rightarrow \dot{\phi}(t) = \dfrac{\ell}{(r_0 - v_0 t)^2\sin^2\theta}$, reemplazamos en $\hat{r})$

$$\Rightarrow -m\cancel{(r_0 - v_0 t)}\frac{\ell^2}{(r_0 - v_0 t)^{\cancel{4}\,3}\sin^{\cancel{4}\,2}\theta}\cancel{\sin^2}\theta = -T - mg\cos\theta$$

$\Rightarrow T(t) = \dfrac{m\ell^2}{(r_0 - v_0 t)^3\sin^2\theta} - mg\cos\theta$, imponemos $T(t=0) > 0$

$$\Rightarrow T(t=0) = \frac{m\ell^2}{r_0^3\sin^2\theta} - mg\cos\theta > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{r_0^3}\frac{1}{g} > \cos\theta \sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell^2}{g r_0^3} > \frac{3}{8}$$

ℓ es cte en el tiempo

por lo tanto recordando que $\ell = (r_0 - v_0 t)^2 \dot{\phi} \sin^2\theta = r_0^2 \dot{\phi}_0 \sin^2\theta$

$$\Rightarrow \frac{r_0^4 \dot{\phi}_0^2 \sin^4\theta}{g r_0^3} = \frac{r_0 \dot{\phi}_0^2}{g} \cdot \frac{9}{16} > \frac{3}{8}$$

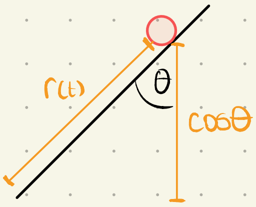
$$\Leftrightarrow r_0 \dot{\phi}_0^2 > \frac{3}{2} g$$

o sea, nos basta con aplicar una velocidad angular inicial muy grande

c) Podemos calcular el trabajo como la variación de la energía mecánica, busquemos expresar la

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) + mgh$$

donde la altura está dada por la distancia al vértice $h(t) = r(t) \cos\theta$



$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \cancel{(r_0 - v_0 t)^2} \frac{\ell^2}{(r_0 - v_0 t)^{\cancel{4}\,2} \sin^{\cancel{4}\,2}\theta} \cancel{\sin^2\theta} \right) + mg(r_0 - v_0 t)\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{r_0^4 \dot{\phi}_0^2 \sin^2\theta}{(r_0 - v_0 t)^2} \right) + mg(r_0 - v_0 t)\cos\theta$$

Ahora nos dicen que calculemos hasta t_1 donde $r = r_0/2$, por lo que reemplazamos

$$r_0 - v_0 t \longrightarrow r_0/2 \quad \text{para la energía final}$$

$$\Rightarrow \Delta E = E_{t_1} - E_{t_0} = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{r_0^4 \dot{\phi}_0^2 \sin^2\theta}{r_0^2/4} \right) + \frac{mgr_0\cos\theta}{2} - \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{r_0^4 \dot{\phi}_0^2 \sin^2\theta}{r_0^2} \right) - mgr_0\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} m r_0^2 \dot{\phi}_0^2 \sin^2\theta \, (4 - 1) + mgr_0\cos\theta \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{3}{2} m r_0^2 \dot{\phi}_0^2 \sin^2\theta - \frac{mgr_0\cos\theta}{2}$$

$$= \frac{9}{8} m r_0^2 \dot{\phi}_0^2 - \frac{mgr_0}{4} \quad (1)$$

OK, ya tenemos cómo cambia la energía mecánica en un intervalo de tiempo, esto es debido a la tensión que es una fuerza no conservativa (la normal no ejerce trabajo porque es perpendicular al desplazamiento)

$$\Rightarrow W_T = \Delta E = \frac{9}{8} m r_0^2 \dot{\phi}_0^2 - \frac{mgr_0}{4}$$

Recordamos que impusimos $r_0\dot{\phi}_0^2 > \frac{3}{2}g$

$$\Leftrightarrow r_0\dot{\phi}_0^2 - \frac{3}{2}g > 0 \qquad / \cdot \frac{9}{8}mr_0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2 - \frac{27}{16}mgr_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2 - \frac{mgr_0}{4} > \frac{27}{16}mgr_0 - \frac{mgr_0}{4}$$

$$\Leftrightarrow W_T > \frac{11}{16}mgr_0 > 0$$

Por lo que el trabajo es positivo, así que la tensión le inyecta energía al sistema $(E_f - E_0 > 0)$

d) Para esto tomamos solo la parte cinética de (1)

$$\Rightarrow K_1 - K_0 = \frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2$$

$$\Rightarrow K_1 - K_0 - W_T = \frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2 - \left(\frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2 - \frac{mgr_0}{4}\right)$$

$$= \frac{mgr_0}{4}$$

Que representa el trabajo del peso. Notar que las fuerzas conservativas (como el peso) también tienen asociadas un trabajo, al igual que las no conservativas, sin embargo este trabajo se cancela con el "producido" por el cambio de la energía cinética cuando no hay fuerzas no conservativas