

P1

Auxiliar 11

a) Debido a que trabajamos en un cilindro (y nos dan una expresión de z en función de θ), usamos coord. cilíndricas.

Para este problema es importante recordar que la normal es perpendicular a la superficie/trayectoria por la que se mueve la masa, por lo que necesitamos calcular el vector tangente a la trayectoria, ya que así podremos imponer que $\vec{N} \cdot \hat{t} = 0$ (perpendiculares).

Usamos la fórmula

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

donde la velocidad en cilíndricas, con $\dot{r} = \dot{\rho} = 0$, $\rho = R_0$ y $z = h - \theta R_1 \Rightarrow \dot{z} = -\dot{\theta} R_1$, es

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{k} = R_0 \dot{\theta} \hat{\theta} - \dot{\theta} R_1 \hat{k} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{R_0^2 \dot{\theta}^2 + R_1^2 \dot{\theta}^2} = \dot{\theta} \sqrt{R_0^2 + R_1^2}$$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{R_0 \dot{\theta} \hat{\theta} - R_1 \dot{\theta} \hat{k}}{\dot{\theta} \sqrt{R_0^2 + R_1^2}} = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + R_1^2}} \hat{\theta} - \frac{R_1}{\sqrt{R_0^2 + R_1^2}} \hat{k}$$

Ahora, la forma más general de la normal es asumiendo que tiene componentes en los 3 ejes, o sea

$$\vec{N} = N_r \hat{\rho} + N_\theta \hat{\theta} + N_z \hat{k}, \text{ imponemos } \vec{N} \cdot \hat{t} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{N} \cdot \hat{t} = \frac{N_\theta R_0}{\sqrt{R_0^2 + R_1^2}} - \frac{N_z R_1}{\sqrt{R_0^2 + R_1^2}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow N_\theta = N_z \frac{R_1}{R_0}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = N_r \hat{\rho} + \frac{R_1}{R_0} N_z \hat{\theta} + N_z \hat{k}$$

b) Ahora, hacemos dinámica, donde las fuerzas son: el peso ($-mg \hat{k}$), la normal ($\vec{N}$) y el roce

$$m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{k} = -mg \hat{k} + N_r \hat{\rho} + \frac{R_1}{R_0} N_z \hat{\theta} + N_z \hat{k} - c(\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{k})$$

$$\Rightarrow m(-R_0 \dot{\theta}^2 \hat{\rho} + R_0 \ddot{\theta} \hat{\theta} - \ddot{\theta} R_1 \hat{k}) = -mg \hat{k} + N_r \hat{\rho} + \frac{R_1}{R_0} N_z \hat{\theta} + N_z \hat{k} - c(R_0 \dot{\theta} \hat{\theta} - \dot{\theta} R_1 \hat{k})$$

Con lo que las ecs. escalares son:

$$\hat{\rho}) -m R_0 \dot{\theta}^2 = N_r$$

$$\hat{\theta}) m R_0 \ddot{\theta} = \frac{R_1}{R_0} N_z - c R_0 \dot{\theta}$$

$$\hat{k}) -m R_1 \ddot{\theta} = -mg + N_z + c R_1 \dot{\theta}$$

c) Notamos que en $\hat{\theta}$ y $\hat{k}$ tenemos N_z que no conocemos, por lo que despejamos esta componente e igualamos

$$\Rightarrow \frac{R_0}{R_1} (m R_0 \ddot{\theta} + c R_0 \dot{\theta}) = -m R_1 \ddot{\theta} + mg - c R_1 \dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} \left(\frac{m R_0^2}{R_1} + m R_1 \right) = - \left(\ddot{\theta} - mg \left(\frac{c R_0^2}{R_1} + c R_1 \right)^{-1} \right) \left(\frac{c R_0^2}{R_1} + c R_1 \right)$$

reordenamiento para hacer el C.V

que podemos resolver con polinomio característico o a lo mecánica. Hagamos el c.v.

$$\dot{z} = \dot{\theta} - mg \frac{R_1}{c} \frac{1}{(R_0^2 + R_1^2)} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} \frac{m}{R_1} (R_0^2 + R_1^2) = - \dot{z} \frac{c}{R_1} (R_0^2 + R_1^2)$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{z} = - c \dot{z}$$

$$\Rightarrow m \int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} \frac{d\dot{z}}{\dot{z}} = - c \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow m \ln\left(\frac{\dot{z}}{\dot{z}_0}\right) = - ct$$

$$\Leftrightarrow \dot{z}(t) = \dot{z}_0 e^{-\frac{c}{m}t}$$

donde como $\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \dot{z}(0) = - \frac{mg R_1}{c} \frac{1}{R_0^2 + R_1^2}$

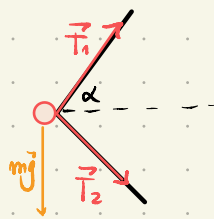
$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) - \frac{mg R_1}{c} \frac{1}{R_0^2 + R_1^2} = - \frac{mg R_1}{c} \frac{1}{R_0^2 + R_1^2} e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{mg}{c} \frac{R_1}{R_0^2 + R_1^2} (1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

Donde notamos que sin importar el roce, la partícula nunca deja de girar ni bajar, pero alcanza una velocidad angular máxima de $mg R_1 / c(R_0^2 + R_1^2)$

P2

Hacemos algo similar al anterior, descomponemos las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ en $\hat{p}$ y $\hat{k}$.
La dinámica es:



$$m \left((\ddot{p} - p\dot{\theta}^2)\hat{p} + \frac{1}{p} \frac{d}{dt}(p^2\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k} \right) = -mg\hat{k} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

$$= -mg\hat{k} + (T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha)\hat{k} - (T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha)\hat{p}$$

Imponiendo un mov. circ. unif. $\Rightarrow \dot{p} = \ddot{p} = 0$, $\ddot{z} = 0$. Las ecs. escalares quedan:

$$\hat{p}) -mr_o\dot{\theta}^2 = -(T_1 + T_2)\cos\alpha$$

$$\hat{\theta}) \frac{1}{p} \frac{d}{dt}(p^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\hat{k}) 0 = -mg + (T_1 - T_2)\sin\alpha$$

Y la condición para que las cuerdas se mantengan tensas es que $T_1, T_2 > 0$. Juntamos $\hat{p})$ y $\hat{k})$

$$T_2 = \frac{mr_o\dot{\theta}^2}{\cos\alpha} - T_1 = \frac{mr_o\dot{\theta}^2}{\cos\alpha} - \frac{mg}{\sin\alpha} - T_2$$

$$\Leftrightarrow 2T_2 = \frac{mr_o\dot{\theta}^2}{\cos\alpha} - \frac{mg}{\sin\alpha} > 0$$

$$\Rightarrow r_o\dot{\theta}^2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - g > 0$$

donde por geometría $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{H}{2r_o} \Rightarrow r_o\dot{\theta}^2 \frac{H}{2r_o} - g > 0 \Rightarrow \dot{\theta} > \sqrt{\frac{2g}{H}}$

b) Describamos r con pitágoras

$$r^2 + \frac{H^2}{4} = L^2 \Rightarrow r^2 = L^2 - \frac{H^2}{4} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow 2r\dot{r} = -2L\dot{v}_0$$

$$\Rightarrow \dot{r} = -\frac{v_0 L}{r} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -v_0 \left(\frac{\dot{L}r - L\dot{r}}{r^2} \right)$$

$$= -v_0 \left(-\frac{v_0}{r} + \frac{L}{r^2} \frac{v_0 L}{r} \right)$$

$$= \frac{v_0^2}{r} \left(1 - \frac{L^2}{r^2} \right)$$

$$= \frac{v_0^2}{r} \left(\frac{r^2 - L^2}{r^2} \right) = \frac{v_0^2}{r^3} \cdot -\frac{H^2}{4}$$

o. La cte. es $-v_0^2 H^2/4$