P2.-

Se tiene una plataforma de largo L, que rota con respecto a un eje en el punto O, en el extremo izquierdo de la base de largo $2L$, con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega_0$ como se observa en la Figura.

Una partícula de masa m se encuentra sobre esta plataforma y amarrada a una cuerda de largo $2L$ sujeta al extremo P de la base, o sea, cuando la plataforma comienza a elevarse, $\theta = 0$, la cuerda está completamente estirada y la masa se encuentra en el punto O, pero con el movimiento de la plataforma comienza a deslizarse sobre ella.

Calcule la distancia de la masa m al origen O en función del tiempo y con esto calcule su posición, velocidad y aceleración en función del ángulo de la plataforma θ.

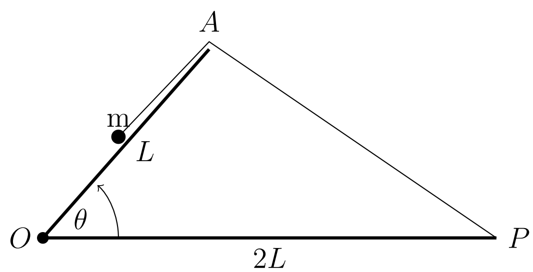
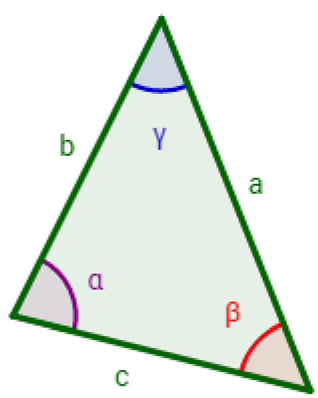


Figura 1

Respuesta

Usamos teorema del coseno.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$$

Figura 2

Definiendo la distancia AP como d, la distancia de la masa al punto A como x y la distancia de

O a la masa como r, nos queda:

$$d^2 = 4L^2 + L^2 - 2 \cdot 2L^2 \cos\theta$$
$$d = L\sqrt{5 - 4\cos\theta},$$

además, por geometría tenemos:

$$r = L - x;\ x + d = 2L$$
$$\Rightarrow r = d - L$$
$$\Rightarrow r(\theta) = L(\sqrt{5 - 4\cos\theta} - 1).$$

Ya con la posición solo basta con derivar una vez y dos veces para obtener la velocidad y aceleración.

$$\dot{r} = \frac{L \cdot 4\sin\theta \cdot \dot{\theta}}{2\sqrt{5 - 4\cos\theta}} = \frac{2L\sin\theta \cdot \omega_0}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}}, \tag{10}$$

notamos que podemos simplificar el cálculo usando regla de la cadena:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \cdot \omega_0,$$

calculamos la derivada con la regla de la división:

$$\frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{2L\omega_0 \cos\theta \cdot \sqrt{5 - 4\cos\theta} - \frac{4L\sin^2\theta \cdot \omega_0}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}}}{5 - 4\cos\theta}$$
$$\frac{d\dot{r}}{d\theta} = 2L\omega_0 \left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}} - \frac{2\sin^2\theta}{(5 - 4\cos\theta)^{3/2}}\right)$$
$$\frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{2L\omega_0}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}} \left(\cos\theta - \frac{2\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta}\right)$$
$$\Rightarrow \ddot{r}(\theta) = \frac{2L\omega_0^2}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}} \left(\cos\theta - \frac{2\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta}\right)$$

P2

Tenemos que la velocidad del pescador con respecto a la orilla del río (el sistema en el que está definido el sist. de coordenadas) es la velocidad del río más la del pescador c/r al río (suma de velocidades de Galileo)

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_0$$

donde geométricamente tenemos que $\vec{v}_0 = v_0 \cos\theta \, \hat{r} - v_0 \sin\theta \, \hat{\theta}$ y como el pescador siempre rema hacia el origen del sist. de coord., $\vec{v}_p = -v_p \hat{r}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = -v_p \hat{r} + v_0 \cos\theta \hat{r} - v_0 \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\hat{r})\ \dot{r} = -v_p + v_0 \cos\theta = \frac{dr}{dt} \quad (1)$$

$$\hat{\theta})\ r\dot{\theta} = -v_0 \sin\theta = r\frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

Ahora, haciendo (1)/(2) $\Rightarrow \dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{-v_p + v_0 \cos\theta}{-v_0 \sin\theta} = \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r(v_p - v_0\cos\theta)}{v_0 \sin\theta}$ (3)

2. Integremos (3) $\dfrac{dr}{r} = \dfrac{(v_p - v_0\cos\theta)\,d\theta}{v_0 \sin\theta}$

$$\Rightarrow \int_D^r \frac{dr}{r} = \frac{v_p}{v_0}\int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta} - \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow \ln(r)\Big|_D^r = -\frac{v_p}{2v_0}\ln\left(\frac{\cos\theta + 1}{1 - \cos\theta}\right) - \ln(\sin\theta)\Big|_{\pi/2}^{\theta}$$

$$\ln\left(\frac{r}{D}\right) = \ln\left(\left(\frac{\cos\theta + 1}{1 - \cos\theta}\right)^{-\frac{v_p}{2v_0}}\right) - \ln(\sin\theta)$$

$$\Rightarrow r(\theta) = D\left(\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta + 1}\right)^{\frac{v_p}{2v_0}} \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= D\left(\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}\right)^{\frac{v_p}{2v_0}} \frac{1}{\sin\theta} = D\,\frac{\tan(\theta/2)^{v_p/v_0}}{\sin\theta}$$

donde para que $r = 0$ para algún θ, por ejemplo $\theta \ll 1$, necesitamos que $v_p/v_0 \gg 1 \Leftrightarrow v_p \gg v_0$