

P1

Auxiliar 1

Tenemos la EDO:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = a$$

donde nos gustaría que el lado derecho fuese 0, por lo que haremos un cambio de variable de la siguiente forma:

$$m\ddot{x} + kx - a = 0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx - \frac{k}{k} \cdot a = 0$$

$$m\ddot{x} + k \left(x - \frac{a}{k} \right) = 0$$

Utilizamos el c.v. $z = x - \frac{a}{k}$, donde a y k son ctes. $\Rightarrow \dot{z} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{x}$, reemplazamos

$$\Rightarrow m\ddot{z} + kz = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (1)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Ahora si resolvamos.

► Polinomio característico: Es un método de resolución de EDOs para cuando son ctes. los coef. que acompañan a la variable. Se hace de la siguiente forma:

Reemplazamos los $\ddot{z} \rightarrow \lambda^2$, $\dot{z} \rightarrow \lambda$ y $z \rightarrow 1$

$$(1) \rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2$$

Como $\omega > 0$, $\omega \in \mathbb{R} \Rightarrow \omega^2 > 0 \Rightarrow -\omega^2 < 0$, así que hacemos

$$\lambda^2 = -1 \cdot \omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-1 \cdot \omega^2} = \pm | \omega | \cdot i = \pm i \omega, \text{ ya que } \omega > 0 \Rightarrow | \omega | = \omega$$

Por lo tanto tenemos dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$z_1(t) = A e^{+i\omega t} \quad \text{y} \quad z_2(t) = B e^{-i\omega t}$$

Con A y B constantes que se determinan con condiciones iniciales, finalmente la solución es.

$$z(t) = A e^{+i\omega t} + B e^{-i\omega t}$$

$$= A \cos \omega t + A \sin \omega t + B \cos \omega t - B \sin \omega t$$

$$= \tilde{A} \cos \omega t + \tilde{B} \sin \omega t \quad (2)$$

▷ Ansatz: un ansatz es una adivinanza de cómo puede ser la forma de una solución. En este caso tenemos un oscilador armónico, por lo que la solución debe tener una forma cíclica, en particular trigonométrica

$$z_{1,2}(t) \propto e^{i\alpha t} \quad \text{no lo conocemos a priori}$$

Reemplazamos en (1) $\rightarrow -\alpha^2 e^{i\alpha t} + \omega^2 e^{i\alpha t} = 0 \quad / e^{-i\alpha t}$

$$\Rightarrow -\alpha^2 + \omega^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm \omega$$

con lo que encontramos la expresión de α (en el ansatz era una incógnita), obteniendo lo mismo que antes.

Ahora ocupemos C.I. en (2)

$$\bullet z(t=0) = \tilde{A} \cdot 1 + \tilde{B} \cdot 0 = C \Leftrightarrow \tilde{A} = C$$

$$\bullet \dot{z}(t=0) = -\omega \tilde{A} \cdot 0 + \omega \tilde{B} \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \tilde{B} = 0$$

así que la solución nos queda $z(t) = C \cos \omega t \Rightarrow x(t) = C \cos \omega t + \frac{a}{k}$

▷ Truco de mecánica: vemos que $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dz} \cdot \dot{z}$
regla de la cadena

Ocupándolo en (1) y jugando con los diferenciales de las derivadas y de las integrales.

$$(1) \rightarrow \dot{z} \frac{d\dot{z}}{dz} = -\omega^2 z \quad / \int dz, \text{ o sea, integramos en } z$$

$$\Rightarrow \int_0^z \dot{z} dz = -\omega^2 \int_0^z z dz$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{z}^2}{2} = -\frac{\omega^2}{2} (z^2 - C^2)$$

P2

Recordamos la expansión en serie de Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

donde x_0 es el punto en torno al cual queremos aproximar. Ahora queremos aproximar en torno a 0, $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) = e^{ax} &= e^{ax_0} + \frac{1}{1!} a e^{ax_0} (x-x_0)^1 + \frac{1}{2!} a^2 e^{ax_0} (x-x_0)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{a}{1!} x + \frac{a^2}{2!} x^2 + \frac{a^3}{3!} x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright g(x) = \sin(x) &= \sin(x_0) + \frac{1}{1!} \cos(x_0) (x-x_0) - \frac{1}{2!} \sin(x_0) (x-x_0)^2 - \frac{1}{3!} \cos(x_0) (x-x_0)^3 + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright h(x) = \cos(x) &= \cos(x_0) - \frac{1}{1!} \sin(x_0) (x-x_0) - \frac{1}{2!} \cos(x_0) (x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} \sin(x_0) (x-x_0)^3 + \frac{1}{4!} \cos(x_0) (x-x_0)^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \end{aligned}$$

Entre más términos consideramos, más "precisa" es la aproximación. Ahora, como $x \ll 1$, entonces los x 's con exponentes más grandes son despreciables, por lo que tomando solo el primer término

$$\triangleright e^{ax} \approx 1$$

$$\triangleright \sin(x) \approx x$$

$$\triangleright \cos(x) \approx 1$$

} muy utilizados más adelante