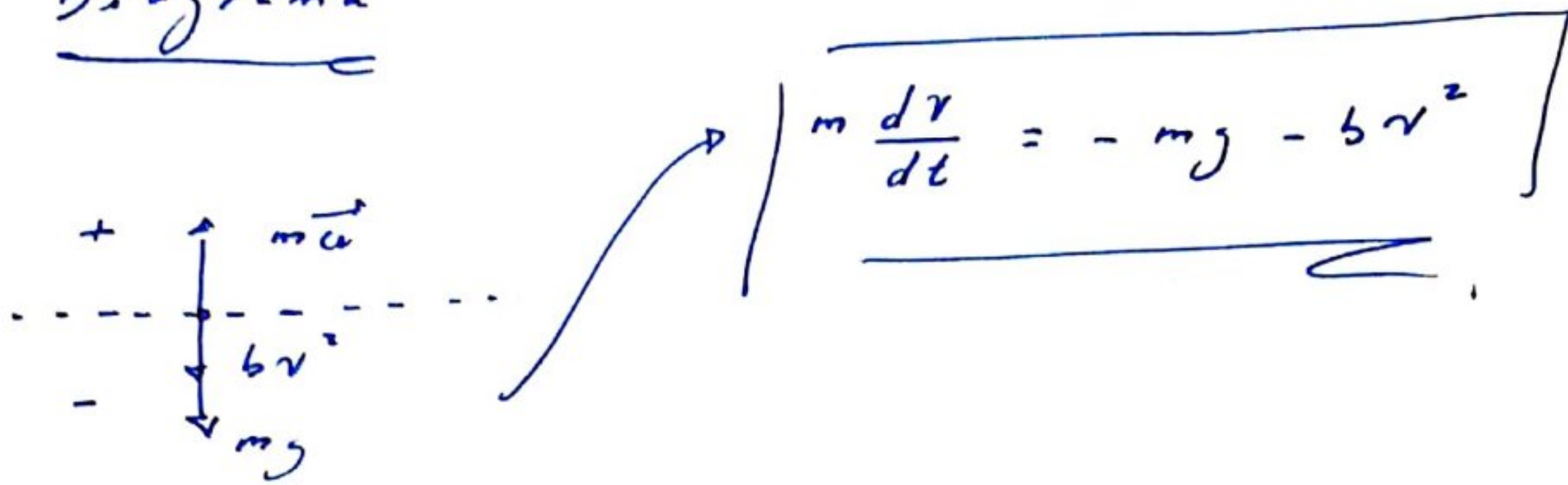


Ejercicio Recuperativo # 1

i)

Diagrama



ii) si usamos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dz}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dz} = -(mg + bv^2), \text{ luego integramos}$$

$$-\frac{1}{2} m \int_{v_i}^v \frac{dv^2}{mg + bv^2} = \int_0^z dz$$

Entonces:

$$u^2 = mg + bv^2 \rightarrow du^2 = b dv^2$$

$$\rightarrow -\frac{m}{2b} \int_{u_i}^u \frac{du^2}{u^2} = \int_0^z dz$$

$$\rightarrow -\frac{m}{2b} \ln u \Big|_{u_i}^u = z$$

$$\rightarrow -\frac{m}{2b} [\ln u - \ln u_i] = z$$

luego en terminos de v

$$-\frac{m}{2b} [\ln (mg + bv^2) - \ln (mg + bv_i^2)] = z$$

$$\rightarrow \frac{m}{2b} \ln \left[\frac{mg + bv_i^2}{mg + bv^2} \right] = z$$

$$\rightarrow \frac{mg + bv_i^2}{mg + bv^2} = e^{\frac{2bz}{m}}$$

Así que:

$$mg + bv_i^2 = (mg + bv^2) e^{\frac{2bz}{m}}$$

o bien:

$$mg + bv^2 = (mg + bv_i^2) e^{-\frac{2bz}{m}}$$

y finalmente se obtiene que:

$$\rightarrow bv^2 = (mg + bv_i^2) e^{-\frac{2bz}{m}} - mg$$

$$\boxed{v^2 = \left[\frac{mg}{b} + v_i^2 \right] e^{-\frac{2bz}{m}} - \frac{mg}{b}}$$

iii) tomando $v_t = \frac{mg}{b}$ la expresión anterior:

$$v^2 = (v_t^2 + v_i^2) e^{-\frac{2bz}{m}} - v_t^2$$

en z_{max} la velocidad $v(z_{max}) = 0$

$$\rightarrow 0 = (v_t^2 + v_i^2) e^{-\frac{2bz_{max}}{m}} - v_t^2$$

$$\rightarrow \frac{v_i^2}{v_t^2 + v_i^2} = e^{-\frac{2bz_{max}}{m}}$$

luego:

$$\ln \left(\frac{v_i^2}{v_t^2 + v_i^2} \right) = -\frac{2bz_{max}}{m}$$

$$\frac{m}{2b} \left[\ln(v_t^2 + v_i^2) - \ln v_t^2 \right] = z_{max}$$

$$\text{como } v_t^2 = \frac{mg}{b} \rightarrow \frac{v_i^2}{g} = \frac{m}{b}$$

finalmente:

$$z_{max} = \frac{v_i^2}{2g} \ln \left(\frac{v_t^2 + v_i^2}{v_t^2} \right)$$

Ejercicio Recuperativo P2

- * Masa m sometida a:
 - $(-kx)$ fuerza restauradora lineal
 - $(-b\dot{x})$ fuerza de amortiguamiento

* Inicialmente: $x(t=0) = x_0$; $v(t=0) = v_0$

→ Amortiguamiento crítico: $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} (A + Bt)$ (:))

Ec. de movimiento: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Con (:) y condiciones iniciales, calculamos ctes:

$$x(t=0) = x_0 \Rightarrow x(0) = 1 \cdot (A + B \cdot 0) = \boxed{A = x_0} \quad (\text{para } x_{eq} = 0)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} (A + Bt) + e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot B$$

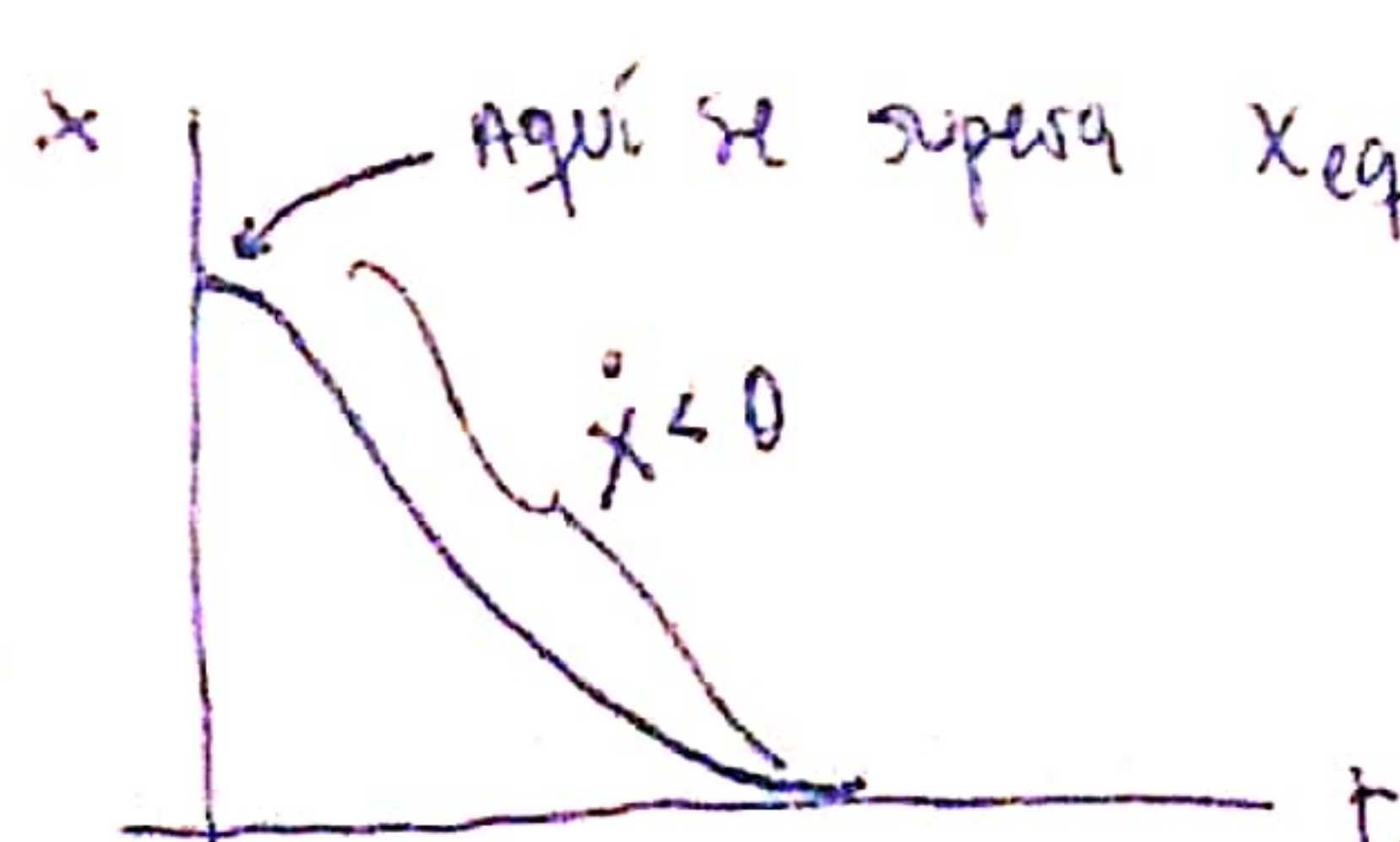
$$\rightarrow v(t=0) = v_0 \Rightarrow v(0) = -\frac{b}{2m} \cdot 1 \cdot (A + 0) + 1 \cdot B = v_0$$

$$\Rightarrow B - \frac{b}{2m} x_0 = v_0 \Rightarrow \boxed{B = v_0 + \frac{b}{2m} x_0}$$

$$\rightarrow \text{Solución es: } \left\{ x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \left[x_0 + \left(v_0 + \frac{b}{2m} x_0 \right) t \right] \right\}$$

→ La condición que buscamos es que la partícula PASE la pos. de equilibrio.

esto se traduce en: $\dot{x} < 0$



$$\Rightarrow \dot{x} = e^{-\frac{b}{2m}t} \left(-\frac{b}{2m} \right) \left[x_0 + \left(v_0 + \frac{b}{2m} x_0 \right) t \right] + e^{-\frac{b}{2m}t} \left(v_0 + \frac{b}{2m} x_0 \right)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \cancel{\frac{-b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} x_0} - \frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} v_0 t - \frac{b^2}{(2m)^2} e^{-\frac{b}{2m}t} x_0 t + e^{-\frac{b}{2m}t} v_0 + \cancel{\frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} x_0} < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} v_0 t - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 e^{-\frac{b}{2m}t} x_0 t + e^{-\frac{b}{2m}t} v_0 < 0$$

$$\Rightarrow \left\{ v_0 \left(-\frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot t + e^{-\frac{b}{2m}t} \right) < \left(\frac{b}{2m}\right)^2 e^{-\frac{b}{2m}t} x_0 t \right\}$$

* Qualquer condição logo de impor $\dot{x} < 0$ give

Ejercicio Recuperativo P3

Oscilador armónico SIN
AMORTIGUAMIENTO

Masa m ; frecuencia natural ω_0

Inicialmente en reposo.

En $t=0$ | velocidad v_0 en $t=0$ y $x=0 \rightarrow$ Ec. de movimiento:
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

En $t=t_1 = \frac{3\pi}{2\omega_0}$ | oscila libremente, pero a partir de este instante
comienza a ser aplicada una fuerza $F(t) = F_0 \cos(t + \sigma)$

Encontrar movimiento en $0 \leq t \leq t_1$ y en $t \geq t_1$

Primera parte: $t \in (0, t_1)$

Ec. de movimiento: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow$ Solución del tipo

Encontramos A y B con condiciones iniciales: $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

$$x(t=0) = 0 \rightarrow \text{scribble}$$

$$A \cos(0) + B \sin(0) = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0 \Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t=0) = -\omega_0 \cdot 0 \cdot \sin(0) + \omega_0 B \cos(0) = v_0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{\omega_0}}$$

$\rightarrow$ Movimiento en $t \in (0, t_1)$:
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Ahora para $t \geq t_1$, hay forzamiento y, siguiendo el hint, la ec. de un oscilador armónico forzado por una fuerza externa $F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$ y sometido a una fricción viscosa $f = b\dot{x}$ es:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \theta_0) \quad ; \quad \gamma = b/2m$$

Con solución (**)

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\sin(\omega t + \theta_0 + \beta)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Pero para el problema, la fuerza que mueve el oscilador es:

$$F(t) = F_0 \cos(t + \theta) \quad \text{y No hay fuerza viscosa} \Rightarrow \gamma = 0$$

→ Usamos esto en (**) $\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\sin(t + \theta + \beta)}{\omega_0^2 - 1}$

$$\tan \beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} \quad (\text{Diverge?}) \rightarrow \beta = \arctan(\infty) = \pi/2$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\sin(t + \theta + \pi/2)}{\omega_0^2 - 1}} \quad \text{para } t \geq t_1$$

mm
mm

On