Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

FI1100-5 Introducción a la Física Moderna, 2022/02
Pauta Auxiliar 2 - Movimiento Armónico Simple

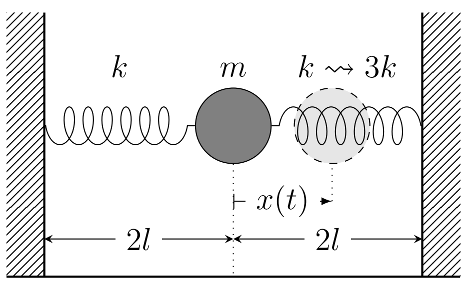
Profesor: **Sebastián López**
Auxiliares: Rodrigo Cuellar
Camilo Núñez Barra
Ayudante: Clemente Miranda

22 de agosto de 2022

P1. Oscilaciones en resortes tensos

Considere dos resortes de largo natural l y constante elástica k, unidos por una partícula puntual de masa m. Estos resortes se estiran y anclan a dos murallas separadas por una distancia $4l$. La masa queda en reposo a una distancia $2l$ de cada muralla pues los resortes son iguales.

Tras el estiramiento, se modifica instantáneamente el resorte derecho para que triplique su constante elástica. Luego, la masa comienza a oscilar armónicamente. No considere aceleración de gravedad, el movimiento es horizontal.



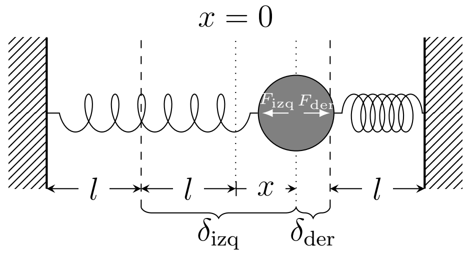
a) **Encuentre la ecuación de movimiento de la masa con respecto a la posición de equilibrio original.**

Ubicamos el origen del sistema de referencia a una distancia $2l$ de las murallas, es decir, en el punto de equilibrio original. Definimos x como la posición de la masa en función del tiempo con respecto al origen.

La ley de Hooke establece que un resorte de constante elástica k elongado δ con respecto a su largo natural l ejerce una fuerza F dada por

$$F = -k\delta \tag{1.1}$$

Notemos que el resorte de la izquierda se elonga $\delta_{\text{izq}} = l + x$ y el resorte de la derecha se elonga $\delta_{\text{der}} = l - x$ pero en sentido opuesto.



La segunda ley de Newton dice que

$$m\ddot{x} = -k\delta_{\text{izq}} + 3k\delta_{\text{der}} \tag{1.2}$$

por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} = -k(l + x) + 3k(l - x) = -4kx + 2l \tag{1.3}$$

que se puede reescribir como

$$\ddot{x} = -\frac{4k}{m}\left(x - \frac{l}{2}\right). \tag{1.4}$$

b) Calcule la nueva posición de equilibrio en torno a la cual se producirá la oscilación.

Un punto de equilibrio x_{eq} es aquel en que la fuerza neta se anula. Por lo tanto (Newton), satisface $\ddot{x} = 0$. Luego,

$$x_{\text{eq}} = \frac{l}{2}. \tag{1.5}$$

c) Escriba la solución para la posición de la masa en función del tiempo. Aplique las condiciones iniciales del problema. Recuerde explicitar la amplitud, frecuencia angular y fase de oscilación en su respuesta final.

Reescribimos la ecuación de movimiento como

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_{\text{eq}}) = 0 \tag{1.6}$$

donde definimos

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{1.7}$$

Hacemos el cambio de variable $\bar{x} = x - x_{\text{eq}}$ y notando que $\ddot{\bar{x}} = \ddot{x}$ entonces escribimos

$$\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2\bar{x} = 0 \tag{1.8}$$

que es la ecuación de un MAS, cuya solución conocemos:

$$\bar{x}(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{1.9}$$

Deshaciendo el cambio de variable, la posición en función del tiempo es

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + x_{\text{eq}} \tag{1.10}$$

y la velocidad en función del tiempo es

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega_0 t + \phi). \tag{1.11}$$

La masa estaba inicialmente en reposo en el origen, es decir, $x(t=0)=0$ y $\dot{x}(t=0)=0$. La condición inicial para la velocidad establece que

$$\dot{x}(0) = -\omega A \sin\phi \overset{!}{=} 0 \implies \sin\phi = 0 \implies \phi = 0 \tag{1.12}$$

y la condición inicial para la posición establece que

$$x(0) = A\cos 0 + x_{\text{eq}} \overset{!}{=} 0 \implies A = -x_{\text{eq}} = -\frac{l}{2} \tag{1.13}$$

Concluimos entonces que

$$x(t) = -\frac{l}{2}\cos\left(t\sqrt{\frac{4k}{m}}\right) + \frac{l}{2} \tag{1.14}$$

o bien

$$x(t) = \frac{l}{2}\left(1 - \cos\left(2t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\right). \tag{1.15}$$

d) Calcule la energía potencial elástica y energía cinética del sistema en función del tiempo.

La energía potencial elástica es la suma de las energías potenciales de cada resorte:

$$\begin{align}
U &= \frac{1}{2}k\delta_{\text{izq}}^2 + \frac{1}{2}3k\delta_{\text{der}}^2 \tag{1.16}\\
&= \frac{1}{2}k\left(\frac{3}{2}l^2 - \frac{l}{2}\cos(\omega_0 t)\right)^2 + \frac{1}{2}3k\left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\cos(\omega_0 t)\right)^2 \tag{1.17}\\
&= \frac{3}{2}kl^2 + \frac{1}{2}kl^2\cos^2(\omega_0 t). \tag{1.18}
\end{align}$$

Por otro lado, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}kl^2\sin^2(\omega_0 t). \tag{1.19}$$

e) Determine la energía mecánica del sistema y demuestre que es una cantidad conservada.

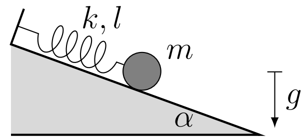
La energía mecánica del sistema es la suma de la energía cinética y la energía potencial elástica,

$$E = K + U = \frac{3}{2}kl^2 + \frac{1}{2}kl^2(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) = 2kl^2 \tag{1.20}$$

que es constante a través del tiempo.

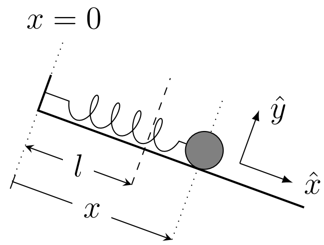
P2. Masa en plano inclinado

Una partícula de masa m está unida por un resorte de constante elástica k y largo natural l a un punto fijo. La partícula se puede mover sin roce por un plano inclinado en un ángulo α. La partícula se suelta del reposo cuando el largo del resorte es l.



a) **Encuentre la ecuación de movimiento de la masa.**

Ubicamos el origen del sistema de referencia en el punto fijo del resorte. Consideramos los ejes cartesianos inclinados con la dirección $\hat{x}$ positiva cuesta abajo y la dirección $\hat{y}$ positiva perpendicularmente hacia afuera de la cuña. Definimos x como la posición de la masa en función del tiempo con respecto al origen.



La ley de Hooke establece que un resorte de constante elástica k elongado δ con respecto a su largo natural l ejerce una fuerza elástica F dada por

$$F_\mathrm{e} = -k\delta \tag{2.1}$$

y notamos que $\delta = x - l$. Esta es una fuerza restauradora que se anula cuando el resorte está en su largo natural ($x = l$) y apunta hacia la posición del largo natural ($F_\mathrm{e} < 0$ si $x > l$ y $F_\mathrm{e} > 0$ si $x < l$).

La segunda ley de Newton dice vectorialmente que

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\mathrm{e} \tag{2.2}$$

La aceleración de gravedad se puede descomponer en $\vec{g} = \hat{x}g\sin\alpha - \hat{y}g\cos\alpha$. La fuerza normal es $\vec{N} = N\hat{y}$ y la fuerza elástica es $\vec{F}_\mathrm{e} = -k(x - l)\hat{x}$. Notamos que la partícula no se mueve perpendicularmente a la cuña. Luego, la ecuación de movimiento según $\hat{y}$ es

$$0 = -mg\cos\alpha + N \tag{2.3}$$

que permite despejar la normal, y la ecuación de movimiento según $\hat{x}$ es

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - k(x - l) \tag{2.4}$$

que se puede reescribir como

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \left(l + \frac{g\sin\alpha}{k/m}\right)\right). \tag{2.5}$$

b) **Determine el punto de equilibrio del corcho.**

El punto de equilibrio x_eq es aquel en que la fuerza neta se anula, por lo tanto (Newton), satisface $\ddot{x} = 0$. Luego,

$$x_\mathrm{eq} = l + \frac{g\sin\alpha}{k/m}. \tag{2.6}$$

c) **Escriba la solución para la posición de la masa en función del tiempo. Aplique las condiciones iniciales del problema. Recuerde explicitar la amplitud, frecuencia angular y fase de oscilación en su respuesta final.**

Reescribimos la ecuación de movimiento como

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_{\text{eq}}) = 0 \tag{2.7}$$

donde definimos

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \tag{2.8}$$

Hacemos el cambio de variable $\bar{x} = x - x_{\text{eq}}$ y notando que $\ddot{\bar{x}} = \ddot{x}$ entonces escribimos

$$\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = 0 \tag{2.9}$$

que es la ecuación de un MAS, cuya solución conocemos:

$$\bar{x}(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{2.10}$$

Deshaciendo el cambio de variable, la posición en función del tiempo es

$$x(t) = A\cos(\omega_0 + \phi) + x_{\text{eq}} \tag{2.11}$$

y la velocidad en función del tiempo es

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega_0 t + \phi). \tag{2.12}$$

La partícula se suelta del reposo, por lo que establecemos la condición inicial para la velocidad $\dot{x}(t=0) = 0$. Luego,

$$\dot{x}(0) = -\omega A \sin\phi \stackrel{!}{=} 0 \implies \sin\phi = 0 \implies \phi = 0 \tag{2.13}$$

Además, la partícula se suelta del reposo cuando el largo del resorte es l, por lo que establecemos la condición inicial para la posición $x(t=0) = l$. Luego,

$$x(0) = A + x_{\text{eq}} \stackrel{!}{=} l \implies A = -\frac{g\sin\alpha}{k/m}. \tag{2.14}$$

Concluimos entonces que

$$x(t) = -\frac{g\sin\alpha}{k/m}\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + l - \frac{g\sin\alpha}{k/m} \tag{2.15}$$

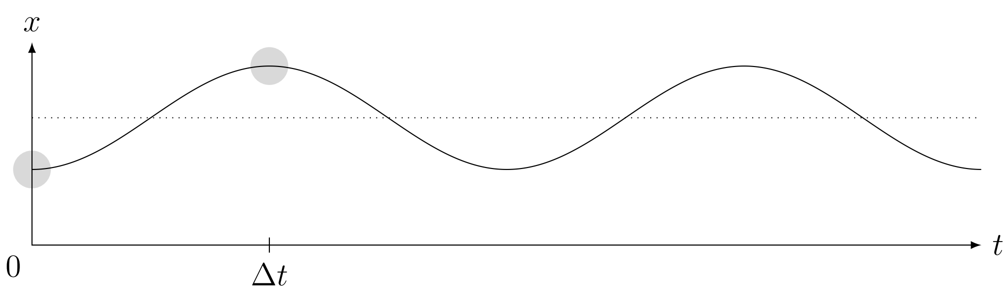
o bien

$$x(t) = \frac{g\sin\alpha}{k/m}\left(1 - \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\right) + l. \tag{2.16}$$

d) **Calcule cuánto tiempo tarda la partícula en detenerse nuevamente por primera vez.**

La condición inicial de reposo dice $\dot{x}(t=0)=0$ y ahora buscamos el primer Δt tal que nuevamente $\dot{x}(t=\Delta t)=0$.

El gráfico de evolución de la posición es

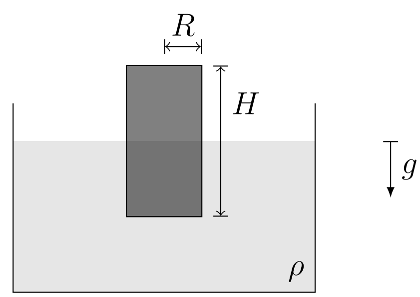


donde se ha marcado la condición inicial y la primera vez posterior en que $\dot{x}=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=0$. Notamos que entre ambas marcas hay medio periodo de oscilación. Luego, el tiempo que tarda es

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi/\omega_0}{2} = \pi\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.17}$$

P3. Corcho en vino

Un corcho cilíndrico de altura H y radio R flota en una copa con vino de densidad ρ quieto. Suponga que el corcho mantiene su base paralela a la superficie. Ignore la viscosidad del líquido.



a) **Encuentre la ecuación de movimiento del corcho. *Hint*: Recuerde el principio de Arquímedes.**

Fijamos el origen del sistema de referencia en la superficie del líquido y definimos z como la altura no sumergida del corcho, positiva hacia arriba.

El principio de Arquímedes establece que un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo experimenta una fuerza de empuje E vertical hacia arriba igual al peso del fluido desalojado, es decir,

$$E = \rho g V \tag{3.1}$$

donde $V=(H-z)\pi R^2$ es el volumen del corcho sumergido.

La segunda ley de Newton establece que la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{z} = -mg + \rho g(H - z)\pi R^2. \tag{3.2}$$

Esta se puede reescribir como

$$\ddot{z} = -\frac{\rho g \pi R^2}{m}\left(z - \left(H - \frac{m}{\rho \pi R^2}\right)\right) \tag{3.3}$$

b) **Determine el punto de equilibrio del corcho.**
El punto de equilibrio z_{eq} es aquel en que la fuerza neta se anula, por lo tanto (Newton), satisface $\ddot{z} = 0$. Luego,

$$z_{\text{eq}} = H - \frac{m}{\rho \pi R^2}. \tag{3.4}$$

c) **Si el corcho se perturba levemente de su punto de equilibrio, calcule el periodo de oscilación.**
Reescribimos la ecuación de movimiento como

$$\ddot{z} + \omega_0^2(z - z_{\text{eq}}) = 0 \tag{3.5}$$

donde definimos

$$\omega_0 = \sqrt{\rho g \pi R^2/m}. \tag{3.6}$$

Hacemos el cambio de variable $\bar{z} = z - z_{\text{eq}}$ y notando que $\ddot{\bar{z}} = \ddot{z}$ entonces escribimos

$$\ddot{\bar{z}} + \omega_0^2 \bar{z} = 0 \tag{3.7}$$

que es la ecuación de un MAS, cuya solución conocemos:

$$\bar{z}(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi). \tag{3.8}$$

El corcho oscila armónicamente y vuelve a su posición de equilibrio tras un tiempo igual al periodo T. Luego,

$$\bar{z}(t+T) = A\cos(\omega_0(t+T) + \phi) = A\cos(\omega_0 t + \phi + \omega_0 T) \stackrel{!}{=} \bar{z}(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{3.9}$$

y sabemos que el periodo del coseno es 2π, tal que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, por lo tanto, $\omega_0 T = 2\pi$ y el periodo de la oscilación es entonces

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\rho \pi R^2/m}}. \tag{3.10}$$

P4. Abducción *(Propuesto)*

Una nave espacial marciana te abdujo de camino al control 1 de Introducción a la Física Moderna y sus extraterrestres te pusieron a dormir con un sedante. Despiertas tiempo después y te encuentras en una pequeña habitación sin ventanas ni salida. Solamente te han dejado tu reloj digital, tu anillo y tu largo collar de cadena de plata. Utilizando estos objetos, ¿cómo puedes determinar si sigues en la Tierra o si te llevaron a Marte?

Hint: Laboratorio 1.