Aux 17: Cosas de sólido rígido

P1 Encontrar T y m.

¿Cómo resolver el problema? Dos estrategias:

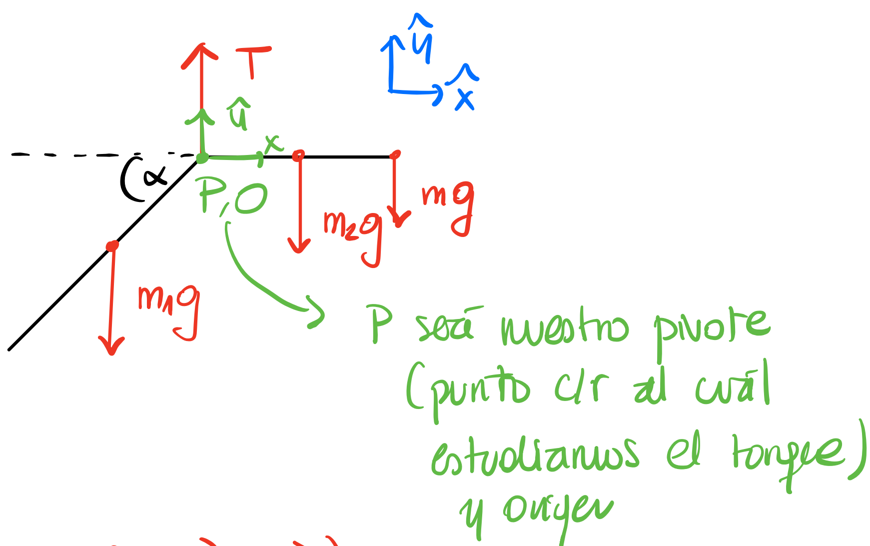
1.- Trabajar con CM de sistema conociendo el CM de c/u de las barras.

2.- Trabajar con CM de ambas barras por separado.

Trabajaremos de la forma 2.-

→ Condiciones de eq.: $\sum \vec{F} = \vec{0}$; $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$.

DCL:



→ La primera condición ($\sum \vec{F} = \vec{0}$): Sólo fuerzas en $\hat{y}$:

$\hat{y}$: $T - m_1 g - m_2 g - mg = 0$ (1)

→ La segunda condición ($\sum \vec{\tau} = \vec{0}$):

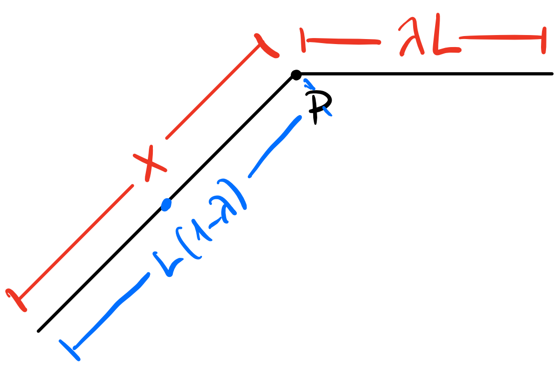
$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_{m_1 g} + \vec{\tau}_{m_2 g} + \vec{\tau}_{mg} = \vec{0} \quad (2)$$

→ T actúa sobre el pivote $\Rightarrow \vec{\tau}_T = \cancel{\vec{r}} \times \vec{T} = \vec{0}$

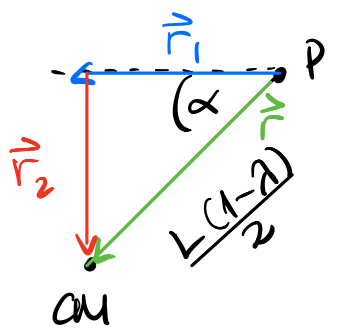
→ $\vec{\tau}_{m_1 g}$: Por definición: $\vec{\tau}_{m_1 g} = \vec{r} \times (-m_1 g \hat{y})$

¿Cuál es $\vec{r}$ que nos lleva desde P hasta el punto donde actúa la fuerza gravitatoria (CM)?

Si la barra es de largo L:



$$x + \lambda L = L \Rightarrow x = L(1-\lambda)$$



¿Cómo calculamos entonces $\vec{r}$?

→ Sabemos que el CM está ubicado justo al medio de la barra (por ser uniforme)

→ Recordemos también que podemos escribir $\vec{r}$ en términos de vectores en $\hat{x}, \hat{y}$ que conozcamos:

$$\vec{r} = -\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\frac{L(1-\lambda)}{2}\cos\alpha\,\hat{x} - \frac{L(1-\lambda)}{2}\sin\alpha\,\hat{y}$$

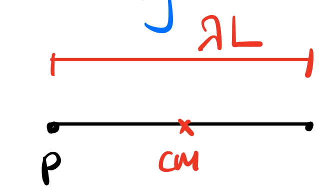
$$\Rightarrow \vec{\tau}_{m_1 g} = \left[-\frac{L(1-\lambda)}{2}\cos\alpha\,\hat{x} - \frac{L(1-\lambda)}{2}\sin\alpha\,\hat{y}\right] \times (-m_1 g \hat{y})$$

Sabemos que $\hat{y} \parallel \hat{y} \Rightarrow \hat{y} \times \hat{y} = 0$, y que $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$.

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{m_1g} = -\frac{L(1-\lambda)\cos\alpha}{2} \cdot -m_1 g\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{m_1g} = \frac{L(1-\lambda)}{2} m_1 g\cos\alpha\,\hat{z}$$

• $\vec{\tau}_{m_2g}$: Por def: $\vec{\tau}_{m_2g} = \vec{r}\times\vec{F}$; En este caso tendremos:



$$\vec{r} = \frac{\lambda L}{2}\hat{x} \ ; \ \vec{F} = -m_2 g\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{m_2g} = -\frac{\lambda L}{2} m_2 g\,\hat{z}$$

• $\vec{\tau}_{mg}$: Aquí, la fuerza actúa en el extremo de la barra (pues la masa está colgada en el extremo:

$$\vec{\tau}_{mg} = \vec{r}\times\vec{F} = (\lambda L\hat{x})\times(-mg\hat{y}) = -\lambda L mg\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{mg} = -\lambda L mg\,\hat{z}$$

Reemplazando en (2) ; y notando que sólo hay componentes de $\vec{\tau}$ en $\hat{z}$:

$\hat{z}$: $\frac{L(1-\lambda)}{2} m_1 g\cos\alpha - \frac{\lambda L}{2} m_2 g - \lambda L mg = 0$. (3)

• Con esto, tenemos las sgtes ecs:

m_1 y m_2 son desconocidos.

$$T - m_1 g - m_2 g - mg = 0 \qquad (i)$$

$$\frac{L(1-\lambda)}{2} m_1 g\cos\alpha - \frac{\lambda L}{2} m_2 g - \lambda L mg = 0 \qquad (ii)$$

Hay 4 incógnitas y 2 ecuaciones. ¿De donde podemos sacar otra?

Def: Concepto de densidad lineal.

La densidad que conocemos: $\rho = \frac{M}{V}$ para un objeto 3D, también puede ser escrita para un objeto 1D (como lo es la barra), de modo que $V \rightarrow L$ (usamos largo en vez de volumen).

$$\Rightarrow \rho_L = \frac{M}{L}$$

Cuando nos dicen que la barra es uniforme $\rightarrow \rho_L =$ constante.

En este caso, para cada barra (uniforme)

$$\rho_1 = \frac{m_1}{L(1-\lambda)} \quad ; \quad \rho_2 = \frac{m_2}{\lambda L}.$$

Como ambas son en verdad una barra: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$\Rightarrow \rho = \frac{m_1}{L(1-\lambda)} \text{ (iii)}, \quad \rho = \frac{m_2}{\lambda L}. \text{ (iv)}$$

Y la barra completa: $\rho = \frac{M}{L}$. (v)

Tenemos entonces:

$$T - m_1 g - m_2 g - mg = 0 \qquad (i)$$

$$\frac{L(1-\lambda)}{2} m_1 g \cos\alpha - \frac{\lambda L}{2} m_2 g - \lambda L m g = 0 \qquad (ii)$$

$$\rho = \frac{m_1}{L(1-\lambda)} \qquad (iii)$$

$$\rho = \frac{m_2}{\lambda L}. \qquad (iv)$$

$$\rho = \frac{M}{L} \qquad (v)$$

5 ecuaciones y 5 incógnitas. Podemos resolver!

→ de (iii) y (iv):

$\rho L = \dfrac{m_1}{(1-\lambda)}$; $\rho L = \dfrac{m_2}{\lambda}$; de (v) $\rho L = M$. Reemplazando:

$$M = \frac{m_1}{(1-\lambda)} \Rightarrow m_1 = M(1-\lambda)$$

$$M = \frac{m_2}{\lambda} \Rightarrow m_2 = M\lambda$$

Reemplazando en (i) y (ii):

$$T - M(1-\lambda)g - M\lambda g - mg = 0 \qquad (I)$$

$$\frac{L(1-\lambda)}{2} M(1-\lambda) g\cos\alpha - \frac{\lambda L}{2} \cdot M\lambda g - \lambda L m g = 0 \qquad (II)$$

De (II):

$$\lambda \cancel{L} m \cancel{g} = \frac{\cancel{L} M (1-\lambda)^2}{2} \cancel{g} \cos\alpha - \frac{\lambda^2 \cancel{L} M \cancel{g}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda m = \frac{M}{2}\left\{(1-\lambda)^2\cos\alpha - \lambda^2\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{M}{2\lambda}\left\{(1-\lambda)^2\cos\alpha - \lambda^2\right\}}$$

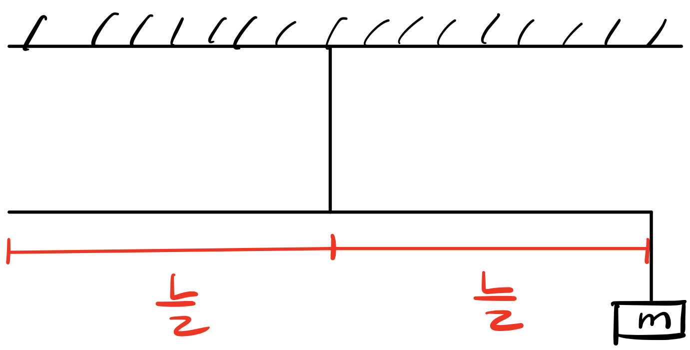
→ Reemplazando en (I):

$$T - Mg + \cancel{M\lambda g} - \cancel{M\lambda g} - \frac{M}{2\lambda}\left\{(1-\lambda)^2\cos\alpha - \lambda^2\right\} g = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T = Mg\left[1 + \frac{1}{2\lambda}\left\{(1-\lambda)^2\cos\alpha - \lambda^2\right\}\right]}$$

(b) $\alpha \to 0$, $\lambda = 1/2$

Si $\alpha \to 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ tendremos algo como:



Evaluamos en m y T:

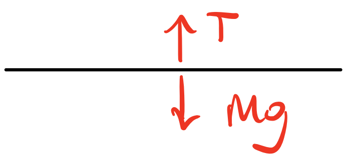
$$m(\alpha=0,\lambda=1/2)=\frac{M}{2(1/2)}\left\{\underbrace{\underbrace{(1-(1/2))^2}_{(1/2)^2}}_{1/4}\underbrace{\cos(0)}_{1}-\underbrace{(1/2)^2}_{1/4}\right\}$$

$$= M\{1/4 - 1/4\} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{m=0}$ ¿Qué nos dice esto? Que el bloque no debe existir para que la barra pueda estar en equilibrio estático!

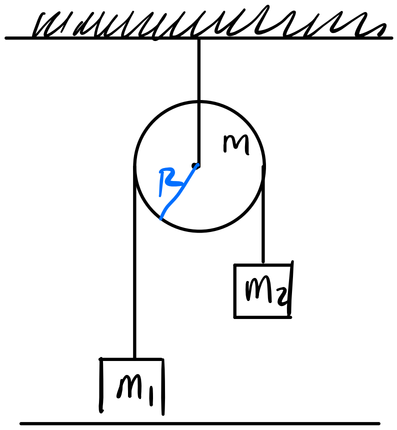
Y evaluando en T:

$\boxed{T = Mg}$ Que es el resultado esperado, pues $\vec{F}_g$ actúa sobre el CM:



$\Rightarrow$ $T - Mg = 0 \Rightarrow T = Mg$ //

$\boxed{P2}$



(a) Rapidez de traslación de bloques luego de que m_2 descienda h, y ω de polea

(b) det. Tensiones.

(a) La energía se conserva: → T es una fza interna, no realiza trabajo neto sobre el sistema.

→ F_g es conservativa.

$$\Rightarrow \Delta E = 0$$

Siguiendo el hint, escribimos ΔE en términos de ΔK y ΔU:

$$E_f - E_i = K_f + U_f - K_i - U_i = K_f - K_i + U_f - U_i = \Delta K + \Delta U$$

$$\Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \,. \quad (1)$$

• K_f: $\quad K_f = K_{f,m_1} + K_{f,m_2} + K_{f,m}$

→ Ambos bloques se mueven con la misma rapidez. Si luego de recorrer h, poseen una rapidez v_f:

$$K_{f,m_1} = \frac{1}{2} m_1 v_f^2 \; ; \; K_{f,m_2} = \frac{1}{2} m_2 v_f^2 \,.$$

→ El disco no se traslada, pero sí rota:

$$K_{f,m} = K_{rot} + \cancelto{0}{K_{traslación}} = K_{rot} \underset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \underbrace{I}_{\frac{1}{2} mR^2} \omega_f^2 = \frac{1}{4} m R^2 \omega_f^2$$

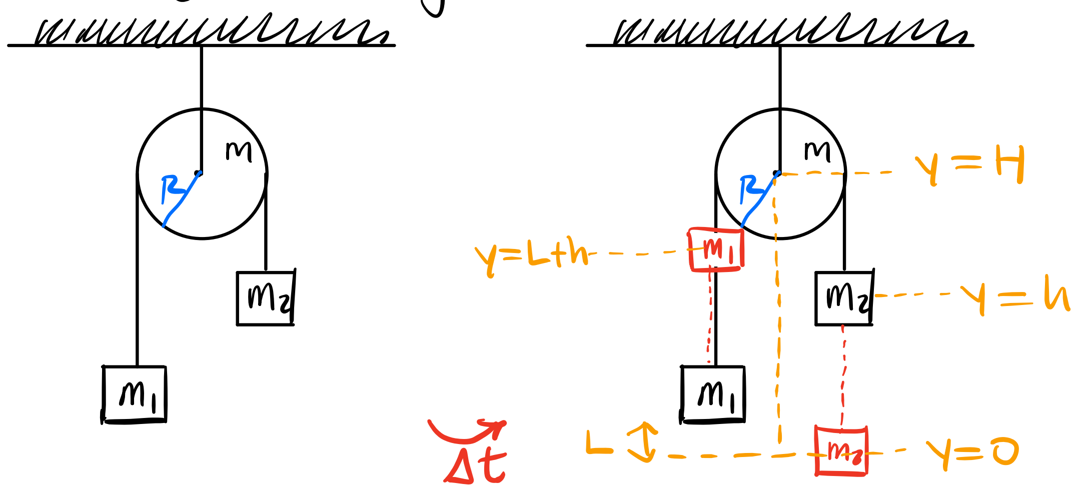
Donde ω_f es la rapidez angular del disco luego de que los bloques hayan recorrido h.

•> K_i: Todo en reposo $\Rightarrow K_i = 0$.

•> ΔK:

$$\Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_f^2 + \frac{1}{2} m_2 v_f^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega_f^2$$

•> ΔU: Supongamos lo sgte:



•> U_f:

$$U_f = U_{m_1f} + U_{m_2f} + U_{mf} = m_1 g(L+h) + m_2 g \cdot 0 + mgH$$

•> U_i:

$$U_i = U_{m_1i} + U_{m_2i} + U_{mi} = m_1 g L + m_2 g h + mgH$$

$$\Rightarrow \Delta U = \cancel{m_1 g L} + m_1 g h + \cancel{mgH} - \cancel{m_1 g L} - m_2 g h - \cancel{mgH}$$

$$\Rightarrow \Delta U = m_1 g h - m_2 g h$$

•> Reemplazando en (1)

$$\frac{1}{2}m_1v_f^2+\frac{1}{2}m_2v_f^2+\frac{1}{4}mR^2\omega_f^2+m_1gh-m_2gh=0$$

Como el disco se mueve debido al mov. de los bloques:

$$\omega_f=\frac{v_f}{R}\Rightarrow v_f=\omega_fR$$

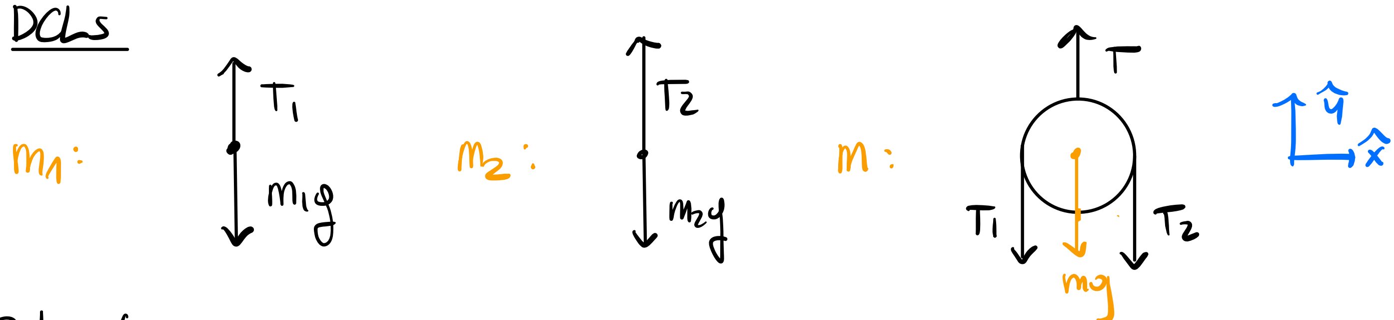
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1\omega_f^2R^2+\frac{1}{2}m_2\omega_f^2R^2+\frac{1}{4}mR^2\omega_f^2=(m_2-m_1)gh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\omega_f^2R^2\left(m_1+m_2+\frac{m}{2}\right)=(m_2-m_1)gh$$

$$\Rightarrow \omega_f^2=\frac{2(m_2-m_1)gh}{R^2(m_1+m_2+m/2)}\Rightarrow \boxed{\omega_f=\sqrt{\frac{2(m_2-m_1)gh}{R^2(m_1+m_2+m/2)}}}$$

(b) Tensiones si $m=M$, $m_1=M$ $m_2=2M$.

DCLs



•> 2da ley:

$$\left.\begin{aligned}&(i)\ T_1-m_1g=m_1a\\&(ii)\ T_2-m_2g=-m_2a\end{aligned}\right\}$$ se mueven con misma aceleración pero en distintas direcciones (misma cuerda).

- Tenemos 3 incógnitas y 2 ecuaciones. ¿De dónde sacar más?

Recordamos que: $\rightarrow a_t = R\alpha$
$\rightarrow \sum \vec{\tau}_{ext} = I\alpha$ } α es la aceleración angular del disco.

En este caso:

- $\sum \tau_{ext} = I\alpha$: Si el centro del disco es el pivote:

$$\vec{\tau}_{T_1} + \vec{\tau}_{T_2} + \vec{\tau}_T = (-R\hat{x}) \times (-T_1\hat{y}) + (R\hat{x}) \times (-T_2\hat{y})$$
$$+ \cancel{(R\hat{y}) \times (T\hat{y})}^{\,0}$$
$$= T_1 R\hat{z} - T_2 R\hat{z}$$

$$\Rightarrow \sum \tau_{ext} = T_1 R - T_2 R$$

$$\Rightarrow T_1 R - T_2 R = \frac{mR^2}{2}\alpha \quad \text{(iii)}$$

Además: Intuitiva/. , si $m_2 > m_1 \rightarrow$ ↻ (−)

$$a = R\alpha \quad \text{(iv)}$$

De (iv) $\alpha = \frac{a}{R}$. En (iii)

$$\cancel{R}(T_1 - T_2) = \frac{mR^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{a}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2(T_2 - T_1)}{m}}$$

Reemplazando en (i) y (ii):

$$T_1 - m_1 g = \frac{2m_1}{m}(T_2 - T_1) \qquad (*)$$

$$T_2 - m_2 g = -\frac{2m_2}{m}(T_2 - T_1) \qquad (**)$$

Evaluando las masas: $m_1 = M$, $m = M$, $m_2 = 2M$

$$T_1 - Mg = 2T_2 - 2T_1 \Rightarrow 3T_1 = 2T_2 + Mg \qquad (I)$$

$$T_2 - 2Mg = -4T_2 + 4T_1 \Rightarrow 5T_2 - 2Mg = 4T_1 \qquad (II)$$

4(I) − 3(II):

$$\left.\begin{aligned} 12T_1 &= 8T_2 + 4Mg \\ -\ 12T_1 &= -15T_2 + 6Mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = -7T_2 + 10Mg \Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{10Mg}{7}}$$

En (I):

$$3T_1 = \frac{2 \cdot 10Mg}{7} + Mg\,\frac{7}{7}$$

$$3T_1 = \frac{27Mg}{7} \Rightarrow T_1 = \frac{27}{21}Mg = \frac{9}{7}Mg$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{9}{7}Mg}$$

Notemos que:

$$a = \frac{2}{M}\left(\frac{10Mg}{7} - \frac{9}{7}Mg\right) = 2g > 0$$

y $\alpha = \frac{2g}{R} > 0$ (*) tiene sentido que ambas sean positivas pues le dimos el signo a mano en las ecuaciones.

Mini Resumen:

- $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ($\vec{r}$ vector que une pivote con punto en que actúa la fuerza).

- $\sum \vec{F} = 0$; $\sum \vec{\tau} = 0$ (en cond. de equilibrio estático)

- Consideraciones del sólido rígido en mov.:

$$K = K_R + K_T = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$ ← E cinética

$$\left.\begin{aligned} s &= r\theta \\ v &= r\omega \\ a_t &= r\alpha \end{aligned}\right\}$$ ← relaciones cuando sólido gira en torno a un eje fijo

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = I \vec{\alpha} \Rightarrow \sum \tau_{ext} = I \alpha$$