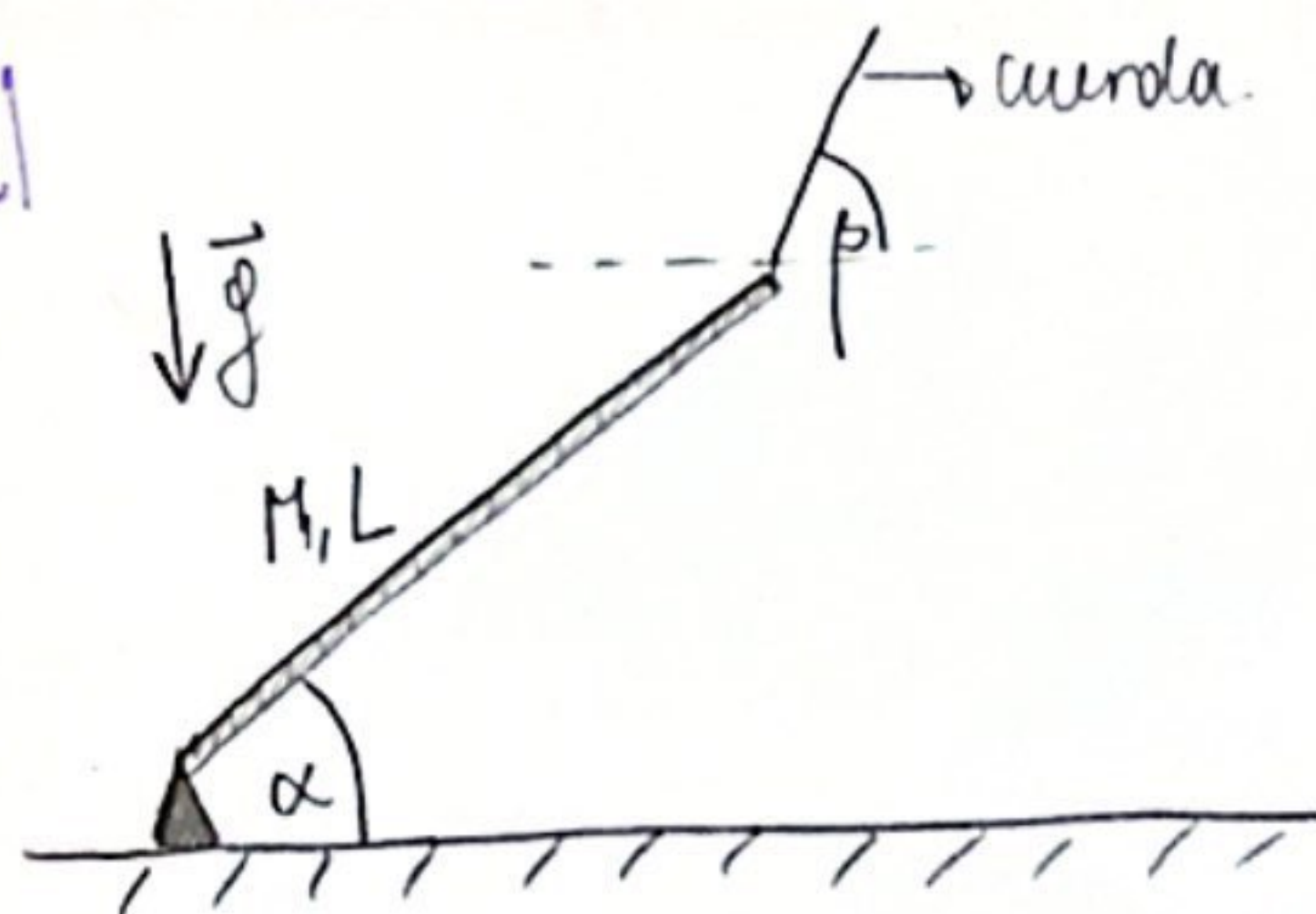


P11



Auxiliar 16.

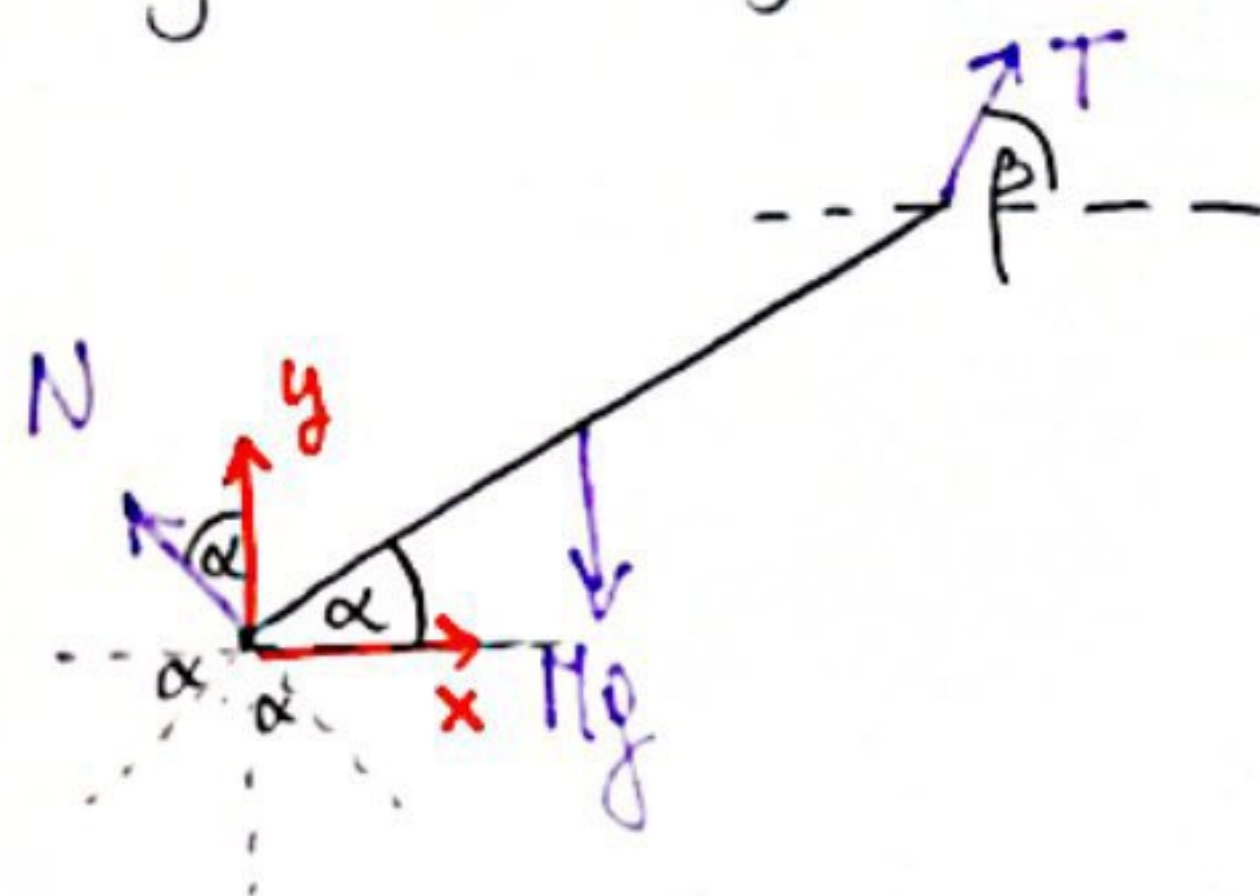
- Barra en reposo $\Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$
 $\Sigma \vec{\tau} = 0$
- α, β conocidos.

a) ¿Tensión de la cuerda?

Comenzamos realizando un DCL. $\rightarrow$ Descomponemos las fuerzas por eje.

$$\bullet \Sigma F_x: -N \sin \alpha + T \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\bullet \Sigma F_y: -Mg + T \sin \beta + N \cos \alpha = 0. \quad (2)$$



* El peso actúa en el CM $\rightarrow$ Como la barra tiene su masa distribuida homogéneamente, su CM se encuentra en el centro. ($L/2$)

Estudiamos los torques donde elegiremos el punto de apoyo como pivote.

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_T.$$

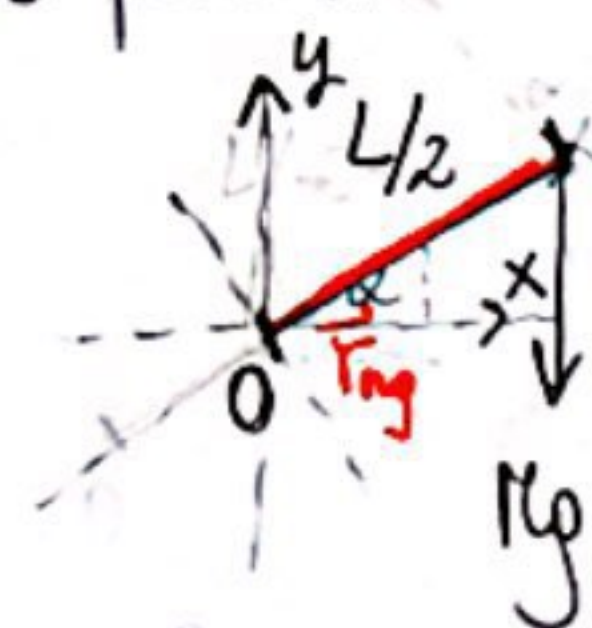
Calculamos cada uno por separado:

$$\bullet \vec{\tau}_N = \vec{r}_N \times \vec{N} = 0 \times \vec{N} = 0 \text{ pues elegimos el pivote en ese punto.}$$

$$\bullet \vec{\tau}_{Mg} = \vec{r}_{Mg} \times (-Mg \hat{y}) = \left(+\frac{L}{2} \sin \alpha \hat{y} + \frac{L}{2} \cos \alpha \hat{x} \right) \times (-Mg \hat{y}).$$

$$= -\frac{L}{2} Mg \cos \alpha (\hat{x} \times \hat{y}) = -\frac{L}{2} Mg \cos \alpha \hat{z}.$$

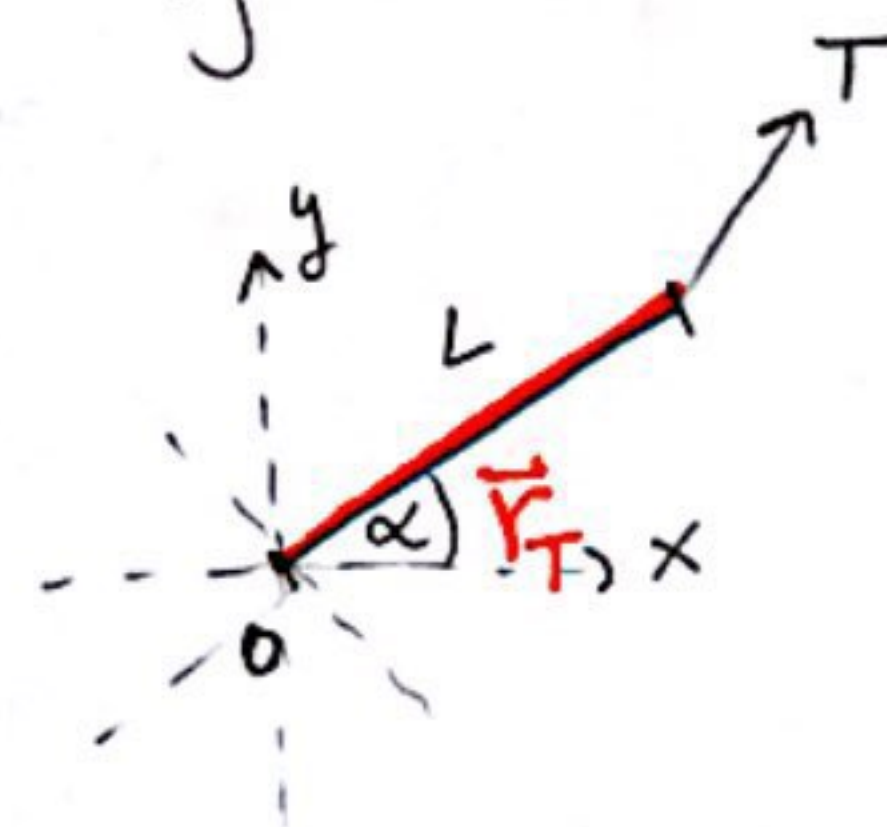
$$\Rightarrow \vec{\tau}_{Mg} = -\frac{L}{2} Mg \cos \alpha \hat{z} < 0 \text{ } \left. \begin{array}{l} \text{rotación} \\ \text{horaria} \end{array} \right\} \rightarrow$$



$$\bullet \vec{\tau}_T = \vec{r}_T \times (T \cos \beta \hat{x} + T \sin \beta \hat{y}) = (L \cos \alpha \hat{x} + L \sin \alpha \hat{y}) \times (T \cos \beta \hat{x} + T \sin \beta \hat{y})$$

$$= LT \cos \alpha \sin \beta \hat{z} + LT \sin \alpha \cos \beta (-\hat{z})$$

$$= LT (\underbrace{\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta}_{\sin(\beta - \alpha)}) \hat{z} = LT \sin(\beta - \alpha) > 0 \text{ } \left. \begin{array}{l} \text{rotación} \\ \text{anti horaria} \end{array} \right\} \leftarrow$$



$$\Rightarrow \Sigma \vec{\tau} = -\frac{L}{2} Mg \cos \alpha + LT \sin(\beta - \alpha) = 0 \Leftrightarrow LT \sin(\beta - \alpha) = \frac{L}{2} Mg \cos \alpha$$

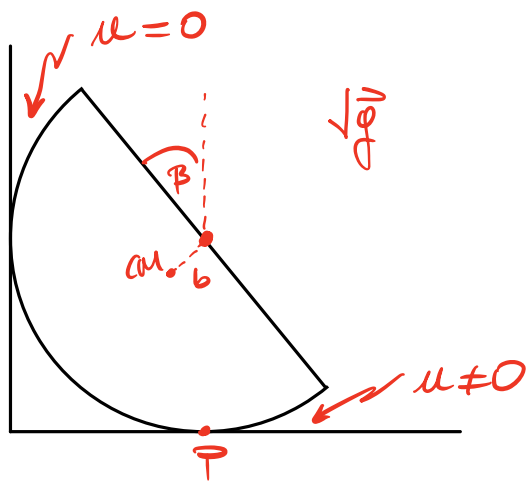
$$\therefore T = \frac{Mg \cos \alpha}{2 \sin(\beta - \alpha)}$$

b) ¿Reacción en el pto. de apoyo? → nos piden la normal.

Reemplazamos T encontrado en (1)

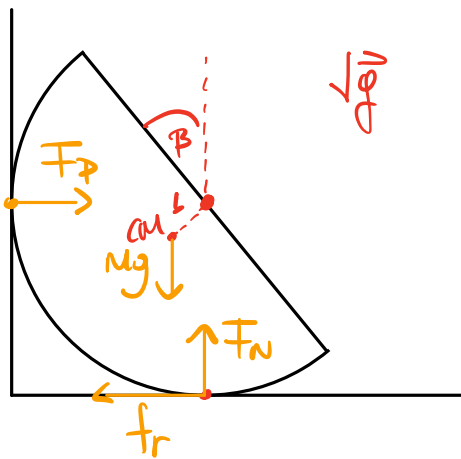
$$-N \sin \alpha + \left(\frac{Mg \cos \alpha}{2 \sin(\beta - \alpha)} \right) \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{Mg}{2} \underbrace{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}_{1/\tan \alpha} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

$$\therefore N = \frac{Mg}{2} \frac{\cos \beta}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)}$$



- CM sobre eje de simetría a una distancia $b = 3R/8$ de la base.
- $\mu = 0$ entre pared y semiesfera.
- $\mu \neq 0$ entre suelo y semiesfera.
- Semiesfera de radio R .

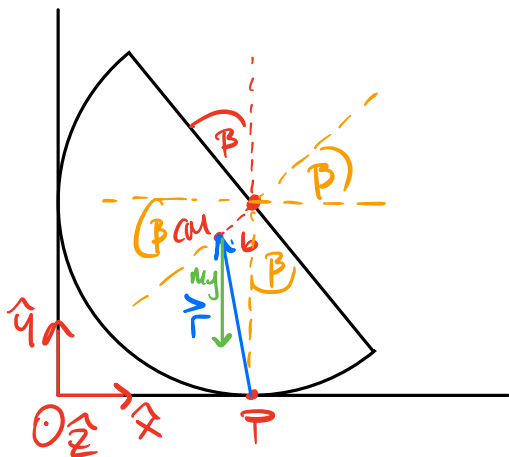
(a) DCL para la esfera:



Donde:

- F_p : Fuerza de contacto con la pared.
- F_N : Fuerza de contacto con el suelo.
- Mg : Fuerza gravitacional (actúa sobre el CM)
- f_r : Fuerza de roce.

(b) Magnitud y dirección del torque respecto del punto P ejercido por la fuerza de gravedad cuando la semiesfera está inclinada en un ángulo β .

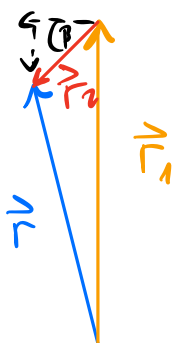


$$\text{Torque: } \vec{\tau} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j$$

Consideramos el torque ejercido por $\vec{F}_g$.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_g$$

¿Cómo podemos escribir $\vec{r}$?



$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

Por como escogimos el Dist. de referencia, tendremos que

$$\vec{r} = R\hat{y} - b\sin\beta\hat{y} - b\cos\beta\hat{x}$$

Además: $\vec{F}_g = -Mg\hat{y}$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = (R\hat{y} - b\sin\beta\hat{y} - b\cos\beta\hat{x}) \times (-Mg\hat{y})$$

$$= -MgR(\hat{y} \times \hat{y}) + b\sin\beta Mg(\hat{y} \times \hat{y}) + Mg b\cos\beta(\hat{x} \times \hat{y})$$

Pero $\hat{y} \parallel \hat{y} \Rightarrow \hat{y} \times \hat{y} = 0$ / además:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = Mg b\cos\beta \hat{z}}$$

Como $b = 3R/8$:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{3}{8} MgR\cos\beta \hat{z}}$$

$$\rightarrow |\vec{\tau}| = \frac{3}{8} MgR\cos\beta$$

$\rightarrow$ Dirección: $\hat{z}$ (saliendo de la pizarra / papel)

(c) f_r :

Semiesfera está en condiciones de equilibrio. ¿En qué se traduce esto?

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \wedge \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad (\text{Fuerza y torque neto es nulo}).$$

➤ Planteamos ecuaciones : Del DCL tenemos:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow F_p \hat{x} - f_r \hat{x} - Mg \hat{y} + F_N \hat{y} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{x} \\ \hat{y} \end{array} \right| \begin{array}{l} F_p = f_r \\ Mg = F_N \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_{fr} + \vec{\tau}_{F_p} + \vec{\tau}_{F_N} = \vec{0} \quad (3)$$

Pero las fuerzas $\vec{F}_N$ y $\vec{f}_r$ actúan sobre el pivote (punto respecto del cual estamos estudiando el torque). Por lo que:

$$\vec{\tau}_{F_N} = \vec{\tau}_{fr} = \vec{0}$$

Reemplazando este último resultado en (3) se tendrá que:

$$\vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_{F_p} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_{Mg} = -\vec{\tau}_{F_p} \quad (4)$$

Tenemos entonces:

$$(1) \quad F_p = f_r$$

$$(2) \quad Mg = F_N$$

$$(3) \quad \vec{\tau}_{Mg} = -\vec{\tau}_{F_p}$$

Queremos conocer f_r . Para ello, necesitamos conocer F_p . ¿De dónde la podemos conocer? De la ec (3) !

Sabemos que $\vec{\tau}_{Mg} = \frac{3}{8} MgR \cos \beta \hat{z}$ Nos falta por conocer $\vec{\tau}_{F_p}$.

Por definición; respecto del punto P:

$$\begin{aligned}\vec{C}_{F_p} &= \vec{r}_p \times \vec{F}_p = (R\hat{y} - R\hat{x}) \times F_p\hat{x} \\ &= RF_p(\hat{y} \times \hat{x}) - RF_p(\hat{x} \times \hat{x}) \quad \circ \text{ pues } \hat{x} \parallel \hat{x}\end{aligned}$$

$$\text{Ahora, } \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \Rightarrow \vec{C}_{F_p} = -RF_p\hat{z}$$

Reemplazando en (3), tendremos que:

$$\frac{3}{8} MgR \cos \beta \hat{z} = -(-RF_p\hat{z}) \Rightarrow F_p = \frac{3}{8} Mg \cos \beta$$

Reemplazando este resultado en (1):

$$f_r = \frac{3}{8} Mg \cos \beta$$