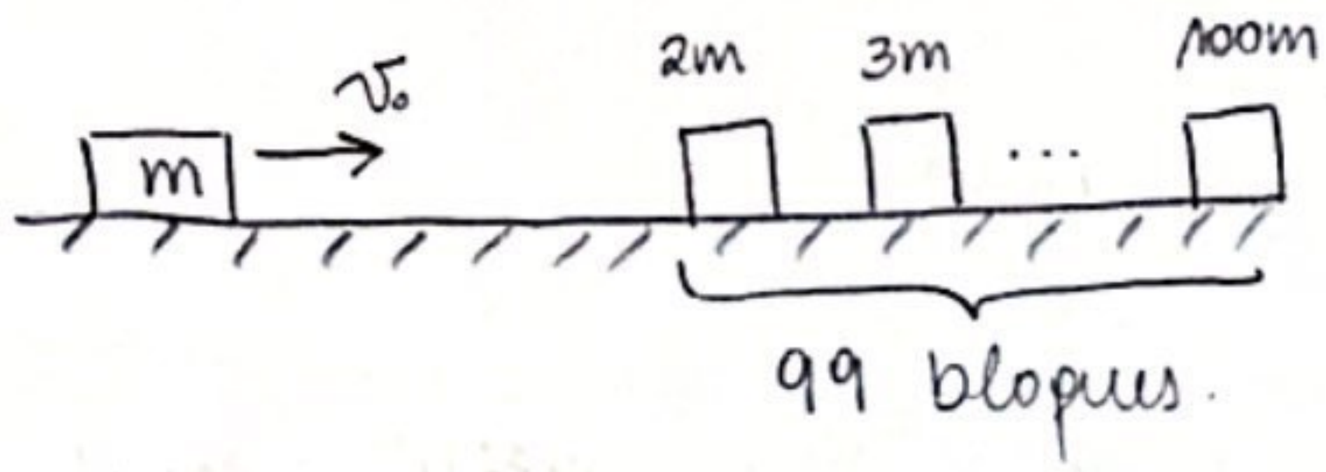
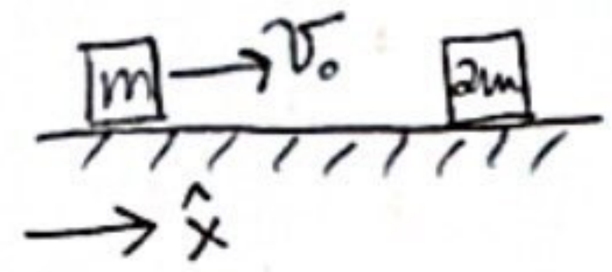
Pauta auxiliar 15

P1

Todos los choques son perfectamente elásticos $\Rightarrow$ $\vec{p}$ y K se conservan.



a) v_{2m} luego del 1er choque. $\rightarrow$ Aislamos el sistema a los bloques involucrados.



* v_m: vel. del bloque m luego del choque
* v_{2m}: vel. del bloque 2m luego del choque.

Como es un choque elástico, el momentum se conserva:

- $p_i = m v_0$
- $p_f = (+) m v_m (+) (2m) v_{2m}$ — incógnitas: v_m, v_{2m}; $(+)$ hacia la der., $(+)$ hacia la der.

Aquí estamos asumiendo que ambas masas se mueven hacia la derecha luego del choque.

¿Realmente pasa eso? Como $m < 2m$, la masa m debería moverse hacia la izq. luego del choque. Sin embargo, haremos que "no sabemos" hacia dónde se mueve y dejaremos que las ecs. entreguen el signo correcto.

$$\Rightarrow p_i = p_f \Leftrightarrow \cancel{m}v_0 = \cancel{m}v_m + 2\cancel{m}v_{2m}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 = v_m + 2v_{2m}} \quad (1)$$

Tenemos 2 incógnitas y 1 ec $\rightarrow$ sabemos que K también se conserva.

- $K_i = K_m + \cancel{K_{2m}}^{0} = \frac{1}{2} m v_0^2$
- $K_f = K_m + K_{2m} = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2}(2m)v_{2m}^2$

$$K_i = K_f \Leftrightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v_0^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v_m^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}2\cancel{m}v_{2m}^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{v_0^2 = v_m^2 + 2v_{2m}^2} \quad (2)$$

Ahora sí, tenemos 2 ecs. y 2 incógnitas //

$\Rightarrow$ Elevamos (1) al cuadrado y reemplazamos en (2):

$$(1)^2: v_0^2 = v_m^2 + 4v_m v_{2m} + 4v_{2m}^2 \xrightarrow{\text{en (2)}} \cancel{v_m^2} + 4v_m v_{2m} + \cancel{4}^{2}v_{2m}^2 = \cancel{v_m^2} + \cancel{2v_{2m}^2}$$
$$\Rightarrow 4v_m v_{2m} + 2v_{2m}^2 = 0.$$
$$v_{2m}(4v_m + 2v_{2m}) = 0 \Leftrightarrow v_{2m} = 0 \ \vee \ 4v_m + 2v_{2m} = 0.$$

$v_{2m}=0$: no tiene sentido físico pues el bloque 2m no queda en reposo.

$$\Rightarrow \boxed{v_{2m} = -2v_m} \quad (3)$$

Nos dice que la vel. del bloque 2m es opuesta a la del bloque m. $\Rightarrow$ tienen dir. opuestas.

Reemplazando (3) en (1):

$$v_0 = v_m - 4v_m \Rightarrow v_0 = -3v_m \Rightarrow \boxed{v_m = -\frac{1}{3}v_0}$$

Nos dice que el bloque m se va hacia la izq. pues v_m es opuesta a v_0 que sabemos se dirige hacia la der.

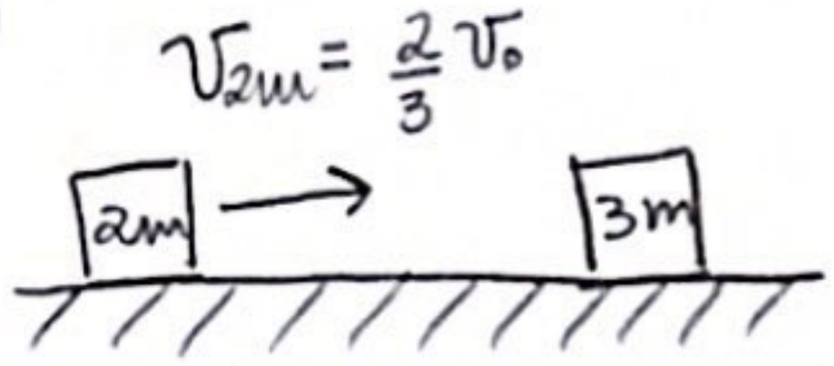
$$\therefore v_{2m} = \frac{2}{3}v_0$$

hacia la derecha //

Scanned with CamScanner

b) Vel. de 2m luego del 2° choque.

Tenemos lo sgte.:



Como $2m < 3m$, sabemos que el bloque 2m se devolverá a la izq. luego del choque y el bloque 3m hacia la derecha.

Considerando esto en las ecs.:

por ser choque elástico $\Rightarrow$ * p se conserva.

- $p_i = (2m) \cdot \frac{2}{3} v_0$
- $p_f = (-)(2m) \cdot v_{2m} + (3m) v_{3m}$ ↳ hacia la izq.

$\frac{4}{3} \cancel{m} v_0 = -2\cancel{m} v_{2m} + 3\cancel{m} v_{3m}$

incognitas

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{4}{3} v_0 = -2 v_{2m} + 3 v_{3m}}$ (4)

* K se conserva:

- $K_i = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}m)\left(\frac{2}{3} v_0\right)^2$
- $K_f = \frac{1}{2}(2m)(v_{2m})^2 + \frac{1}{2}(3m) v_{3m}^2$

$\cancel{m} \cdot \frac{4}{9} v_0^2 = \frac{1}{2}(2\cancel{m}) v_{2m}^2 + \frac{1}{2}(3\cancel{m}) v_{3m}^2$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{8}{9} v_0^2 = 2 v_{2m}^2 + 3 v_{3m}^2}$ (5)

* v_{2m} ahora es la vel. del bloque 2m luego del choque desconocida.

Elevando (4) al cuadrado y reemplazando en (5):

$\frac{16}{9} v_0^2 = 4 v_{2m}^2 - 12 v_{2m} \cdot v_{3m} + 9 v_{3m}^2 \xrightarrow[\text{en } (5) \cdot 2]{} \cancel{4 v_{2m}^2} - 12 v_{2m} v_{3m} + 9 v_{3m}^2 = \cancel{4 v_{2m}^2} + 6 v_{3m}^2$

$+12 v_{2m} v_{3m} = 3 v_{3m}^2$

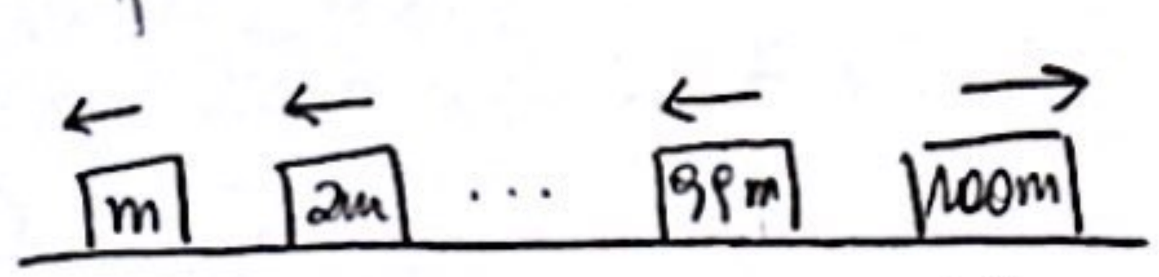
$\Rightarrow \boxed{v_{3m} = 4 v_{2m}}$ (6)

Reemplazando (6) en (4):

$\frac{4}{3} v_0 = 10 v_{2m} \quad \therefore \; v_{2m} = \frac{4}{30} v_0$ //

↳ hacia la izq. (el signo lo incluimos al principio).

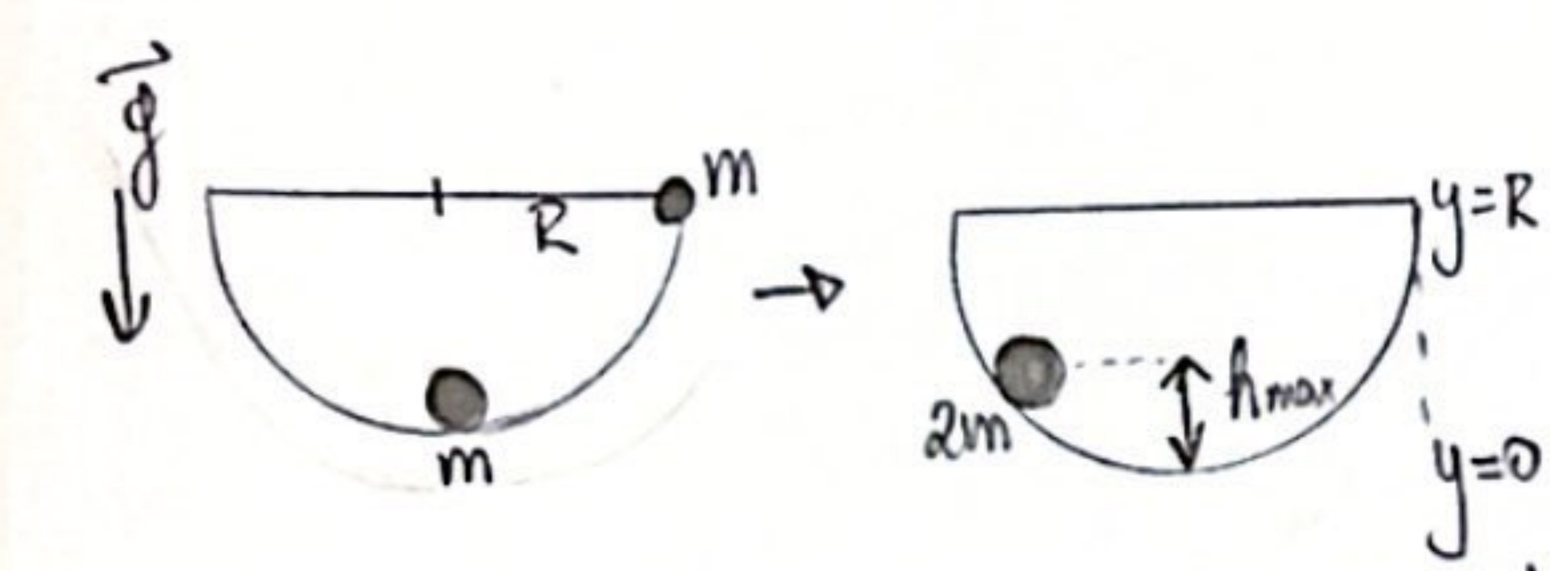
c) por lo visto en (a) y (b), el bloque de menor masa se mueve hacia la izq luego de la colisión $\Rightarrow$



99 bloques a la izq.

1 bloque a la der. //

P2



a) sabemos que se produce un choque perfectamente inelástico pues quedan unidas las masas tras la colisión $\Rightarrow$ p se conserva
K no se conserva.

Dividiremos el movimiento en 3 intervalos.

- Antes del choque: no hay fuerzas disipativas $\Rightarrow$ energía mecánica se conserva.
- Durante el choque: colisión perfectamente inelástica $\Rightarrow$ p se conserva
- Después del choque: no hay fuerzas disipativas $\Rightarrow$ energía mecánica se conserva.

veamos cada uno por separado.

- Antes del choque. • $E_i = \underbrace{\cancel{K_i}}_{\text{parte del reposo.}} + U_i = 0 + mgR = mgR$

energía antes de la colisión cuando la masa llega a $y=0$. $\leftarrow$ $E_f = K_f + \cancel{U_f}^{\,0=y} = \frac{1}{2} m v_m^2$

v_m: rapidez que tiene la bolita antes de colisionar

$E_i = E_f \Leftrightarrow \cancel{m}gR = \frac{1}{2}\cancel{m}v_m^2 \Rightarrow \boxed{v_m = \sqrt{2gR}}$

Rapidez con la que llega la masa

- Durante el choque: sabemos que se conserva el momentum $\Rightarrow p_i = p_f$.

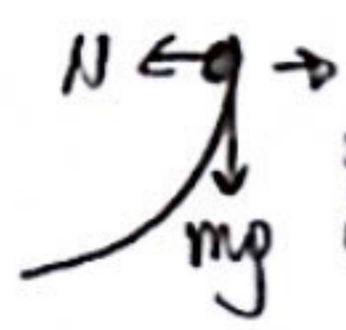
$p_i = m v_m$
$p_f = 2m v_{2m}$

$p_i = p_f \Leftrightarrow \cancel{m}v_m = 2\cancel{m}v_{2m}$

$\sqrt{2gR} = 2v_{2m} \Rightarrow \boxed{v_{2m} = \frac{\sqrt{2gR}}{2}}$

Rapidez luego de la colisión del sist. bolita-bolita.

* Algun@s pensarán que $p_i = 0$, lo cual es cierto. Al inicio del mov. tenemos $p_i = 0$. Sin embargo, no se conserva:



$\rightarrow$ Tenemos presencia de F ext.

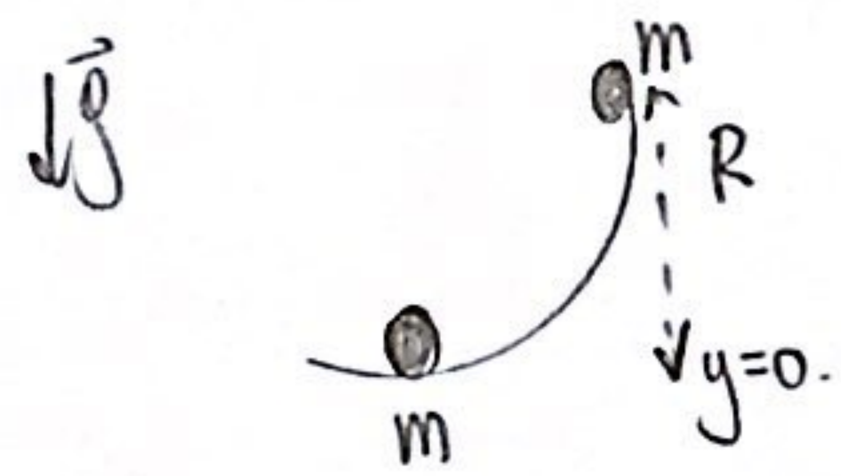
$\Rightarrow$ la conservación de p ocurre en un Δt (en el instante en que las masas colisionan).

- Después del choque: • $E_i = K_i + \cancel{U_i}^{\,y=0} = \frac{1}{2}\underbrace{(2m)}_{\text{masas quedan unidas.}} v_{2m}^2$

• $E_f = \underbrace{\cancel{K_f}}_{0} + U_f = 2mg\,h_{max}$

$E_i = E_f \Leftrightarrow \frac{\cancel{m}\,2gR}{4} = 2\cancel{m}g\,h_{max} \Rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{R}{4}}$ //

b) • Situación inicial:



$$E_{mi} = \cancel{K_1}^{0} + U_1 + \cancel{K_2}^{0} + \cancel{U_2}^{0} = mgR.$$

Ambas masas parten del reposo y la de abajo se encuentra en $y=0$.

• situación final: masas juntas.

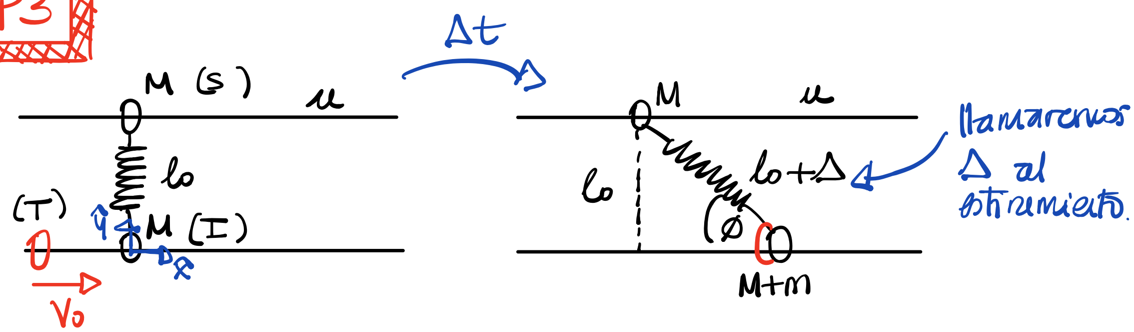
$$E_{mf} = \cancel{K} + U = 2mg\frac{R}{4} = \frac{mgR}{2}.$$

0 pues llegan a la altura máx.

Así: $\Delta E = E_{mf} - E_{mi} = \frac{mgR}{2} - mgR = \boxed{-\frac{mgR}{2}.}$

∴ Se perdió energía por la colisión perfectamente inelástica.
Esta pérdida puede ser debido a deformaciones de la masa o generación de calor.

P3



(a) determinar V_0 máxima tal que (S) no resbale.

→ La colisión es perfectamente inelástica, luego, sólo hay cons. del momentum lineal (E antes y después del choque no es la misma).

Diremos que el conjunto (m+M) sale con rapidez V luego del choque. En ese caso:

$\vec{P}_i = \vec{P}_f$ (1)

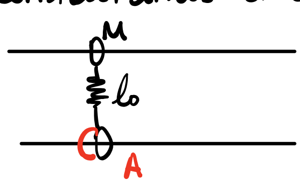
Definiendo el origen y eje coordenado:

$$\left.\begin{aligned}\vec{P}_i &= mV_0\hat{x}\\ \vec{P}_f &= (m+M)V\hat{x}\end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{mV_0 = (m+M)V} \quad (i)$$

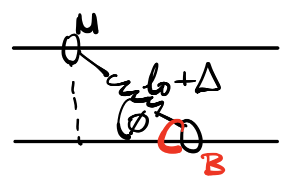
→ Necesitamos conocer V_0 y tenemos 2 incógnitas y 1 ec. ¿De dónde sacamos otra?

¿Se conserva la energía? Como es una colisión perfectam. inelástica, antes y después de la colisión NO se conserva, pero sí se conserva justo después de la colisión.

→ Consideramos entonces dos puntos:



Justo después de la colisión



Cuando se detienen

En ese caso, la energía mecánica de $A \rightarrow B$ se conserva, y:

$E_A = E_B$; donde:

$$E_A = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2$$

justo después de colisión! — resorte en largo natural — M en reposo

$$E_B = \frac{1}{2}(m+M)\cdot 0^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k(L+\Delta-L)^2$$

m+M en reposo — M en reposo

$$\rightarrow E_B = \frac{1}{2}k\Delta^2$$

Así,

$$\cancel{\frac{1}{2}}(m+M)V^2 = \cancel{\frac{1}{2}}k\Delta^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(m+M)V^2 = k\Delta^2} \quad (ii)$$

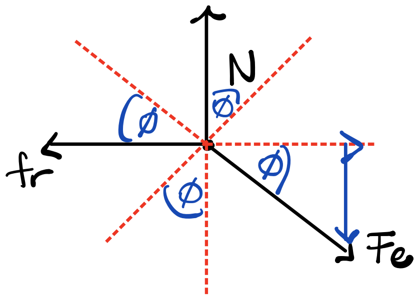
i> Ahora tenemos 2 ecuaciones pero 3 incógnitas (V_0, V, Δ), además, no hemos considerado que nos preguntan por la rapidez máxima V_0.

¿Cómo seguir?

Queremos V_0 máxima tq la argolla (S) No resbale.

→ Cond de eq. ⇒ Dinámica!

Realizamos DCL de la argolla (S) cuando el conjunto (T) e (I) están detenidas.



$\hat{x}$) $F_e \cos\phi - f_r = M \cdot a_x$
$\hat{y}$) $N - F_e \sin\phi = M \cdot a_y$

- Pero M está en reposo $\Rightarrow$ $a_x = a_y = 0$

- Además, estamos en el caso crítico en que la argolla (S) no resbala $\Rightarrow$ $f_r = \mu N$

¿Qué nos dice esto? Recordemos que condiciones críticas nos entregan cantidades máximas o mínimas, en este caso la cond. crítica de no resbalar $f_r = \mu N$ tiene asociada la rapidez máxima V_0 (si aumento un poco V_0 (S) se mueve, por ello es máxima).

Reemplazando en las ecuaciones de mov.:

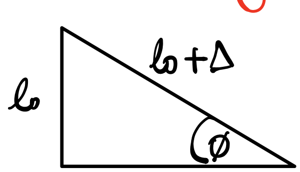
$\hat{x}$) $k\Delta \cos\phi - \mu N = 0$
$\hat{y}$) $N - k\Delta \sin\phi = 0$

Multiplicando $\hat{y}$ por μ y dividiendo $\mu\hat{y} / \hat{x}$:

$$\left.\begin{aligned} \mu N &= k\Delta\cos\phi \\ \mu N &= \mu k \Delta \sin\phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = \mu \tan\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\cot g\,\phi = \mu} \quad \text{(iii)}$$

Ahora, ¿cómo relacionamos el ángulo ϕ con el estiramiento del resorte? Geometría!



$\rightarrow (l_0+\Delta)\sin\phi = l_0$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\phi = \frac{l_0}{l_0+\Delta}} \quad \text{(iv)}$$

tenemos entonces:

$$m V_0 = (m+M) V \qquad (i)$$
$$(m+M) V^2 = k \Delta^2 \qquad (ii)$$
$$\cot \phi = \mu \qquad (iii)$$
$$\sin \phi = \frac{l_0}{l_0 + \Delta} \qquad (iv)$$

4 ecuaciones y 4 incógnitas (V_0, V, Δ, ϕ).

Podemos resolver!

encontremos Δ:

$(iii)^2 \rightarrow \cot^2 \phi = \mu^2$. Por otro lado,

$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \quad / : \sin^2\phi \Rightarrow 1 + \cot^2\phi = 1/\sin^2\phi$

$$\Rightarrow \cot^2 \phi = \frac{1}{\sin^2\phi} - 1$$

$$\Rightarrow \text{En } (iii)^2 : \quad \frac{1}{\sin^2\phi} - 1 = \mu^2 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sin^2\phi} = \mu^2 + 1.} \quad (*)$$

elevando al cuadrado (iv) e invirtiendo:

$$\frac{1}{\sin^2\phi} = \left(\frac{l_0 + \Delta}{l_0}\right)^2.$$

Reemplazando en $(*)$:

$$\left(\frac{l_0 + \Delta}{l_0}\right)^2 = \mu^2 + 1.$$

Despejando Δ:

$$l_0 + \Delta = l_0 \sqrt{\mu^2 + 1} \Rightarrow \boxed{\Delta = l_0\left(\sqrt{\mu^2+1} - 1\right)}$$

Reemplazando en (ii):

$(m+M)V^2 = k\ell_0^2(\sqrt{\mu^2+1}-1)^2$. Despejando V:

$$V^2 = \frac{k\ell_0^2}{(m+M)}(\sqrt{\mu^2+1}-1)^2$$

Elevando al cuadrado (i) y reemplazando:

$$m^2V_0^2 = (m+M)^2V^2 \Rightarrow m^2V_0^2 = \frac{(m+M)^{\cancel{2}}k\ell_0^2}{(m+\cancel{M})}(\sqrt{\mu^2+1}-1)^2$$

Despejando V_0:

$$V_0^2 = \frac{(m+M)k\ell_0^2}{m^2}(\sqrt{\mu^2+1}-1)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{\ell_0}{m}\sqrt{k(m+M)}\left(\sqrt{\mu^2+1}-1\right)}$$

rapidez máxima V_0 tq (S) no resbale.

Ojo: Recordar que es la máxima posible pues impusimos estar en el caso crítico en que (S) no resbala: $f_r = \mu N$. Luego de eso, una rapidez mayor a la que dee esta condición produciría movimiento en la argolla.

(b) Evaluamos en $M=0$:

$$\boxed{V_0 = \frac{\ell_0}{m}\sqrt{km}\left(\sqrt{\mu^2+1}-1\right)}$$

El resultado depende de μ! esto es, a pesar de que las argollas son ideales, igual hay un efecto del roce del carril superior sobre la rapidez de la argolla, esto pues $\mu = \cot\phi$ no depende de las masas.