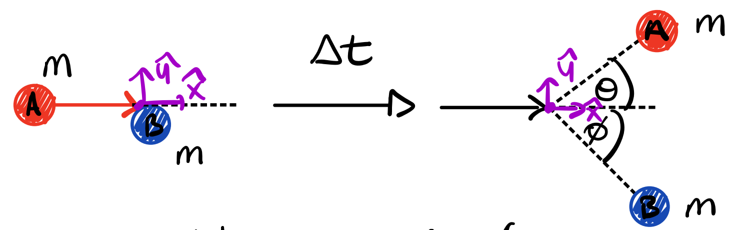
P1



Nos piden determinar ϕ (θ es conocido).

→ Nos hacemos las siguientes preguntas: Luego de la colisión:

¿Se conserva el momentum lineal?
¿Se conserva la energía mecánica del sistema?

La respuesta a ambas preguntas es que sí! Es una colisión elástica, de modo que $\vec{P}$ y E_{mec} se conservan.

Con esto, tendremos que:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad (1) \quad ; \quad E_i = E_f \quad (2)$$

Donde:

$$\vec{P}_i = m \cdot \vec{V}_{Ai} + m \cdot \vec{0}$$ ← En reposo

$$\vec{P}_f = m \cdot \vec{V}_{Af} + m \cdot \vec{V}_{Bf}$$

$$E_i = \frac{1}{2} m V_{Ai}^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m V_{Af}^2 + \frac{1}{2} m V_{Bf}^2$$

Reemplazando en (1) y (2):

$$m \vec{V}_{Ai} = m\vec{V}_{Af} + m\vec{V}_{Bf} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{Ai} = \vec{V}_{Af} + \vec{V}_{Bf}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} m V_{Ai}^2 = \frac{1}{2} m V_{Af}^2 + \frac{1}{2} m V_{Bf}^2 \Rightarrow \boxed{V_{Ai}^2 = V_{Af}^2 + V_{Bf}^2} \quad (4)$$

Recordando que: $\vec{V}\cdot\vec{V} = |\vec{V}|^2 = V^2$ hacemos $(3)\cdot\vec{V}_{Ai}$

$$\Rightarrow \vec{V}_{Ai}\cdot\vec{V}_{Ai} = (\vec{V}_{Af}+\vec{V}_{Bf})\cdot\vec{V}_{Ai}$$

$$\Leftrightarrow V_{Ai}^2 = \vec{V}_{Af}\cdot\vec{V}_{Ai} + \vec{V}_{Bf}\cdot\vec{V}_{Ai} \qquad (5)$$

Queremos seguir haciendo aparecer términos para usar la propiedad.

De (3) $\rightarrow \vec{V}_{Ai} = \vec{V}_{Af} + \vec{V}_{Bf}$. Reemplazando en (5):

$$V_{Ai}^2 = \vec{V}_{Af}\cdot(\vec{V}_{Af}+\vec{V}_{Bf}) + \vec{V}_{Bf}\cdot(\vec{V}_{Af}+\vec{V}_{Df})$$

Desarrollando:

$$= \underbrace{\vec{V}_{Af}\cdot\vec{V}_{Af}}_{V_{Af}^2} + \vec{V}_{Af}\cdot\vec{V}_{Bf} + \underbrace{\vec{V}_{Df}\cdot\vec{V}_{Af}}_{=\vec{V}_{Af}\cdot\vec{V}_{Bf}} + \underbrace{\vec{V}_{Bf}\cdot\vec{V}_{Bf}}_{V_{Bf}^2}$$

$$= V_{Af}^2 + V_{Bf}^2 + 2\vec{V}_{Af}\cdot\vec{V}_{Bf}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{Ai}^2 = V_{Af}^2 + V_{Bf}^2 + 2\vec{V}_{Af}\cdot\vec{V}_{Bf}} \qquad (6)$$

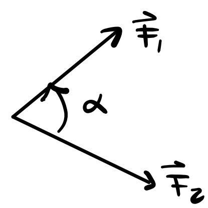
Reemplazando (6) en (4):

$$\cancel{V_{Af}^2} + \cancel{V_{Bf}^2} + 2\vec{V}_{Af}\cdot\vec{V}_{Bf} = \cancel{V_{Af}^2} + \cancel{V_{Bf}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{2\vec{V}_{Af}\cdot\vec{V}_{Bf} = 0} \qquad (7)$$

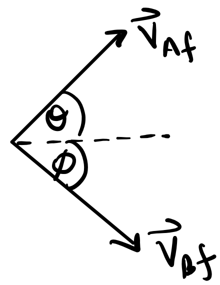
¿Cómo relacionar este resultado con ϕ?

Recordemos que la def. de producto punto es:



$$\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2 = F_1 F_2 \cos\alpha$$

En este caso, luego de la colisión:



$$\Rightarrow \vec{v}_{Af}\cdot\vec{v}_{Bf} = v_{Af}v_{Bf}\cos(\theta+\phi)$$

En (7):

$$\Rightarrow 2v_{Af}v_{Bf}\cos(\theta+\phi)=0$$

v_{Af} y v_{Bf} deben ser >0 para que se cumpla la situación física (de lo contrario una de las partículas estaría en reposo post-colisión).

$$\Rightarrow 2v_{Af}v_{Bf}\cos(\theta+\phi)=0 \iff \boxed{\cos(\theta+\phi)=0}$$

¿Para qué ángulo $\cos(x)=0$?

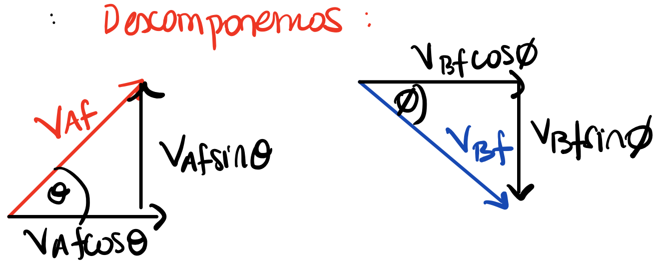
$x=\pi/2 \Rightarrow \theta+\phi=\pi/2$. Como θ es conocido:

$$\boxed{\phi = \frac{\pi}{2}-\theta}$$

* Análogamente, pudimos haber hecho: Cons. de $\vec{p}$ por componente: (definimos origen en *)

$t_{inicial}$: $\vec{p}_i = m v_{Ai}\hat{x}$

t_{final} : Descomponemos:



$$\Rightarrow \vec{P}_f = m v_{Af} \cos\theta \, \hat{x} + m v_{Af} \sin\theta \, \hat{y} + m v_{Bf} \cos\phi - m v_{Bf} \sin\phi$$

luego $\vec{P}_i = \vec{P}_f$ ← Por componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$

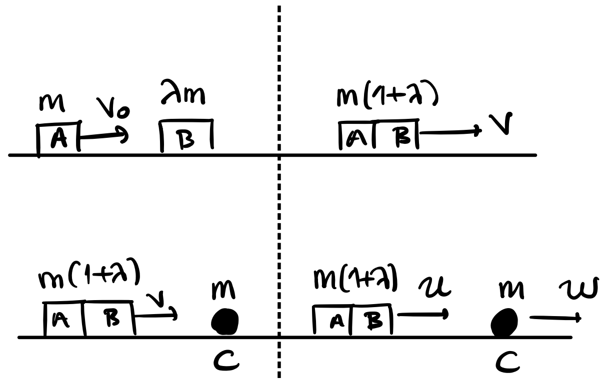
$E_i = E_f$

y resolver igual que antes!

P2

Choque 1:

Choque 2:



Diremos que luego del choque 1 el bloque AB va con rapidez V.
Diremos también que luego del 2do choque el bloque AB queda con rapidez u y la bolita C con rapidez w.
(las 3 desconocidas).

- ¿Qué tipo de choque es el primero?

Perfectam. inelástico → hay cons del momentum, pero NO de la energía mecánica.

- ¿Y el segundo?

Elástico → Se conserva el momentum y la energía mecánica.

Con esto, se tendrá que:

1er Choque:

$$\vec{p}_i = m\cdot V_0 + \lambda m \cdot 0 = mV_0 \;;\; \vec{p}_f = \overbrace{m(1+\lambda)}^{\text{sólo 1 cuerpo!}}V$$

⇒ Cons. del momentum lineal:

$$mV_0 = m(1+\lambda)V \Rightarrow \boxed{V_0 = (1+\lambda)V} \quad (1)$$

2^{do} Choque:

Cons. del momentum lineal: $\vec{p}_i = m(1+\lambda)v + m\cdot 0$
$\vec{p}_f = m(1+\lambda)u + m\omega$

$$\Rightarrow m(1+\lambda)v = m(1+\lambda)u + mw$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+\lambda)v = (1+\lambda)u + mw} \quad (2)$$

Cons. de la energía mecánica: $E_i = \frac{1}{2}m(1+\lambda)v^2 + \frac{1}{2}m\cdot 0^2$
$E_f = \frac{1}{2}m(1+\lambda)u^2 + \frac{1}{2}mw^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(1+\lambda)v^2 = \frac{1}{2}m(1+\lambda)u^2 + \frac{1}{2}mw^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+\lambda)v^2 = (1+\lambda)u^2 + w^2} \quad (3)$$

Tenemos entonces 3 ecuaciones y 3 incógnitas (v, u, w), podemos resolver!

¿Podemos trabajar un poco antes las expresiones para reducir la matraca?

(1) $v_0 = (1+\lambda)v$
(2) $(1+\lambda)v - (1+\lambda)u = w \Leftrightarrow (1+\lambda)(v-u) = w$
(3) $(1+\lambda)v^2 - (1+\lambda)u^2 = w^2 \Leftrightarrow (1+\lambda)(v^2-u^2) = w^2$
$\Leftrightarrow (1+\lambda)(v-u)(v+u) = w^2$

Entonces tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{ll} v_0 = (1+\lambda)v & (i) \\ (1+\lambda)(v-u) = w & (ii) \\ (1+\lambda)(v-u)(v+u) = w^2 & (iii) \end{array}}$$

De (i) podemos conocer v:

$$\boxed{v = \frac{v_0}{1+\lambda}}$$

Por otro lado, (ii) en (iii):

$$\cancel{w}(v+u) = w^{\cancel{2}} \underset{\substack{w \neq 0 \\ \text{(no está} \\ \text{en reposo)}}}{\Longrightarrow} \boxed{v+u = w} \quad \text{(iv)}$$

Ahora si consideramos

$$\left.\begin{aligned} v+u &= w \\ (1+\lambda)(v-u) &= w \end{aligned}\right\} \text{ 2 incógnitas y 2 ecuaciones.}$$

Igualando: $v+u = (1+\lambda)(v-u)$

$$\Rightarrow \cancel{v} + u = \cancel{v} - u + \lambda v - \lambda u$$

$$\Rightarrow (2+\lambda)u = \lambda v \Rightarrow u = \frac{\lambda v}{(2+\lambda)}$$

Pero $v = \dfrac{v_0}{1+\lambda} \Rightarrow \boxed{u = \dfrac{\lambda v_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)}}$

Reemplazando este resultado en (iv):

$$w = \frac{v_0\,(2+\lambda)}{(1+\lambda)(2+\lambda)} + \frac{\lambda v_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)} = \frac{2v_0 + 2\lambda v_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)}$$

$$= \frac{2v_0\cancel{(1+\lambda)}}{\cancel{(1+\lambda)}(2+\lambda)} \underset{1+\lambda \neq 0}{=} \frac{2v_0}{2+\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \frac{2v_0}{2+\lambda}}$$

De este modo:

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{V_0}{1+\lambda} \\ u &= \frac{\lambda V_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)} \\ w &= \frac{2V_0}{2+\lambda} \end{aligned}}$$

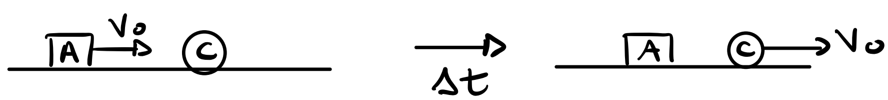
(b) Si $\lambda = 0$ masa del bloque B $\longrightarrow$ $\lambda m = 0$

$\Rightarrow$ $V = V_0$; $u = 0$; $w = V_0$

¿Qué significa esto?

1.- El bloque de masa λm no existe (su masa es 0)

2.- Se retoma el caso de un choque elástico entre A y C con C inicialmente en reposo.



$\vec{P}_i = mV_0$; $\vec{P}_f = mV_f + mV_0$

$\Rightarrow$ $V_f = 0$.