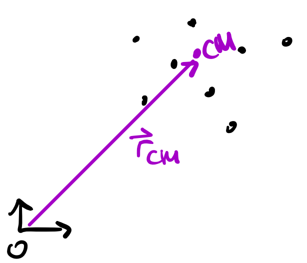
Aux 13

Repaso: Centro de masas

- En problemas de centro de masa describimos el mov. de un sistema (conformado por muchas partículas, o un objeto extendido continuo, por ej una barra de metal) en términos de un sólo punto que actúa (en términos de traslación del sistema) como si toda la masa del sistema estuviera contenida allí, i.e., el sist. se mueve como si todas las $\vec{F}_{ext}$ actuarán sobre una partícula puntual (tal como en dinámica).

- Definiciones:

Pos. del centro de masa: posición promedio de la masa del sistema

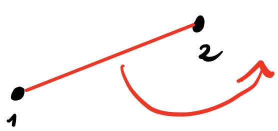


$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}}$$

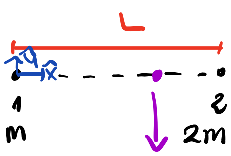
$\vec{r}_i$ → pos. de cada partícula del sistema.

↳ ojo! es importante definir un origen para poder det. el CM de un sistema.

Ej: En un sistema de dos partículas:



El CM estará en un punto de la línea que une ambas partículas, y estará más cercano a la masa de mayor valor!



$$x_{CM} = \frac{m \cdot 0 + 2m \cdot L}{m + 2m} = \frac{2mL}{3m} = \frac{2L}{3}$$

$x_{CM} = \frac{2L}{3}$ → MÁS cerca de 2m!

velocidad del CM : $\boxed{\vec{v}_{cm} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}}$ → velocidad de c/partícula del sistema

aceleración del CM : $\vec{a}_{cm} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} \overset{\text{2da ley}}{=} \dfrac{\sum_i \vec{F}_i}{\sum_i m_i}$

$\vec{F}_i$ es la fuerza neta sobre c/ partícula. Esto incluye fuerzas externas y de interacción (internas). Gracias a la 3ra ley de Newton, las fuerzas internas entre partículas se cancelarán.

$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{cm} = \dfrac{\sum_i \vec{F}_{ext}}{\sum_i m_i}}$

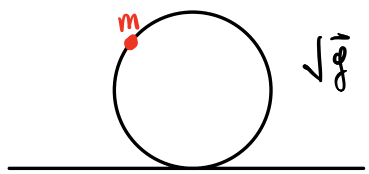
Superhipernueva resumido :

El centro de masas de un sist. de partículas que tiene una masa total M se mueve de forma equivalente a una partícula de masa M que se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta en el sistema

$\boxed{\text{P1}}$

Nos piden conocer el valor de m en función de M de tal forma que la rueda se encuentre en equilibrio estático, es decir, que no haya traslación ni rotación.

Intuitivamente, veamos antes lo sgte:



Si tenemos un sistema formado por sólo una masa:
¿Qué ocurrirá con el CM y con la rueda?

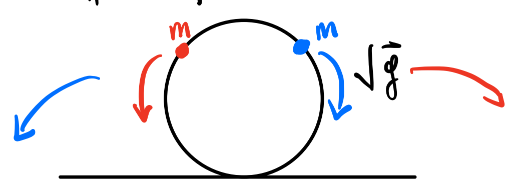
El CM estará ubicado donde está ubicada la partícula. Debido a la fuerza gravitacional, la masa será empujada hacia abajo, provocando que la rueda rote y se traslade.

Si quisiéramos lograr que la rueda no se mueva ¿qué debemos hacer?

Podemos agregar una partícula con igual masa que "compense el peso" de la primera, de modo que haya un balance en el peso y la rueda no se mueva ni rote.

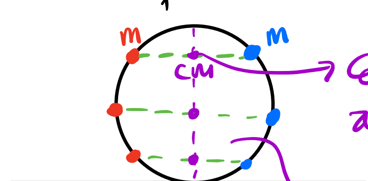
¿Dónde habría que depositarla?

m compensa esta rotación



m compensa esta rotación.

Del resumen, tendremos que el CM estará en:



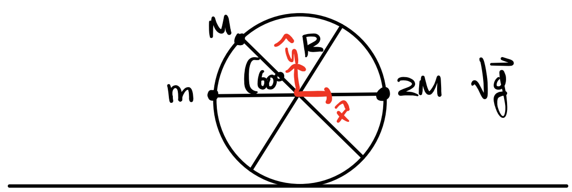
En el punto medio de ambas.

Esto se repite para cualquier altura a la que estén las dos masas (iguales)

$\Rightarrow$ Es decir, necesitamos que la posición del centro de masa esté alineado con el eje de rotación.

Solo nos interesa la componente horizontal del CM.

$\rightarrow$ En el problema:



Definimos nuestro origen, Si queremos que el CM esté alineado con el eje de rotación, de acuerdo a nuestro sist. de ref, necesitamos que:

$$X_{CM} \overset{!}{=} 0. \quad (1)$$

Por otro lado, por definición de CM y nuestra elección de origen:

$$X_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{-m \cdot R - M \cdot R\underbrace{\cos(\pi/3)}_{1/2} + 2MR}{m + M + 2M}$$

$$= \frac{R(-m - M/2 + 2M)}{m + 3M} = \boxed{\frac{R(3/2 M - m)}{m+3M} = X_{CM}}$$

Reemplazando en (1):

$$\frac{R(\frac{3}{2}M - m)}{m + 3M} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}M - m = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}M}$$

$R \neq 0$
$m + 3M \neq 0$

$\Rightarrow$ Valor necesario de m para que junto a M compense el peso de 2M.

P2

(a) ¿Qué se puede decir sobre el CM del sistema conformado por los dos fragmentos luego de la explosión?

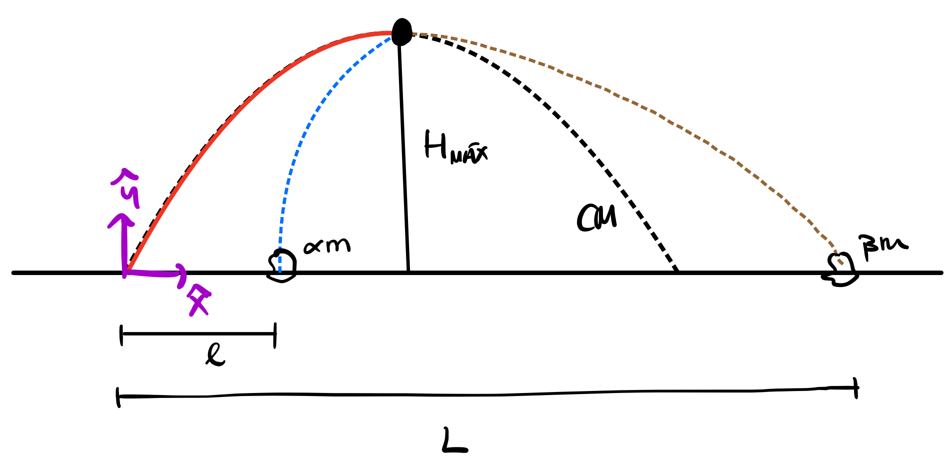
→ La única fuerza externa sobre el proyectil es la gravitacional. Si el proyectil NO explota entonces este seguirá moviéndose con una trayectoria parabólica.

→ Como las fuerzas causadas por la explosión son internas, no afectan el CM del sistema (conformado por ambos fragmentos). Así, luego de la explosión, el CM de los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil seguiría de no haber explotado.

→ En resumen: CM describe un mov. parabólico.

(b) Det. ℓ: ¿Cómo empezar? Nos interesa conocer ℓ con conceptos de centro de masas.

Escribimos el centro de masas cuando ambos fragmentos en el suelo, para ello, antes definimos el origen y eje coordenado:



$$\boxed{X_{cm} = \frac{\alpha m \cdot \ell + \beta m L}{\alpha m + \beta m}} \quad (1)$$

$\leftarrow$ Sólo en $\hat{x}$ (cuando está en el suelo).

Tenemos una ecuación y 2 incógnitas (ℓ, X_{cm}). ¿Cómo podemos conocer X_{cm} de otra manera?

$\Rightarrow$ Cinemática!

El CM describe un mov. con trayectoria parabólica:

$$\vec{r}_{cm}(t) = \vec{r}_{i,cm} + \vec{V}_{i,cm}\Delta t + \frac{\vec{a}_{cm}}{2}\Delta t^2$$

El CM antes de la explosión es simplemente el proyectil:

$$\vec{r}_{cm}(t) = 0 + V_0\cos\theta_0\Delta t\,\hat{x} + V_0\sin\theta_0\Delta t\,\hat{y} - \frac{g}{2}\Delta t^2$$

Por componentes:

$$\hat{x} \quad x_{cm}(t) = V_0\cos\theta_0\Delta t \qquad (2)$$
$$\hat{y} \quad y_{cm}(t) = V_0\sin\theta_0\Delta t - \frac{g}{2}\Delta t^2 \qquad (3)$$

Tenemos la pos. del centro de masas! Nos interesa conocer X_{cm} una vez que está en el suelo:

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = V_0\cos\theta_0\overline{\Delta t} \qquad (4)$$
$$0 = V_0\sin\theta_0\overline{\Delta t} - \frac{g}{2}\overline{\Delta t}^2 \qquad (5)$$

de la ec. (5):

$$\overline{\Delta t} = \frac{2V_0\sin\theta_0}{g}$$

En la ec. para (4): $X_{cm} = \dfrac{2V_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} = \dfrac{V_0^2}{g}\sin(2\theta_0)$

$$\Rightarrow \boxed{X_{cm} = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\theta_0}$$

Reemplazando en (1) :

$$\frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{\alpha m \ell + \beta m L}{\alpha m + \beta m}$$

Trabajando la expresión y despejando ℓ:

$$\frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{\cancel{m}(\alpha \ell + \beta L)}{(\alpha + \beta)\cancel{m}} \Rightarrow \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0 (\alpha+\beta)}{g} = \alpha \ell + \beta L$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{V_0^2 \sin(2\theta_0)(\alpha+\beta)}{g} - \beta L \right)$$

→ Recordando que se debe cumplir que:

$$\alpha m + \beta m = m \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

(la masa del sistema es la misma antes de que el proyectil explotara)

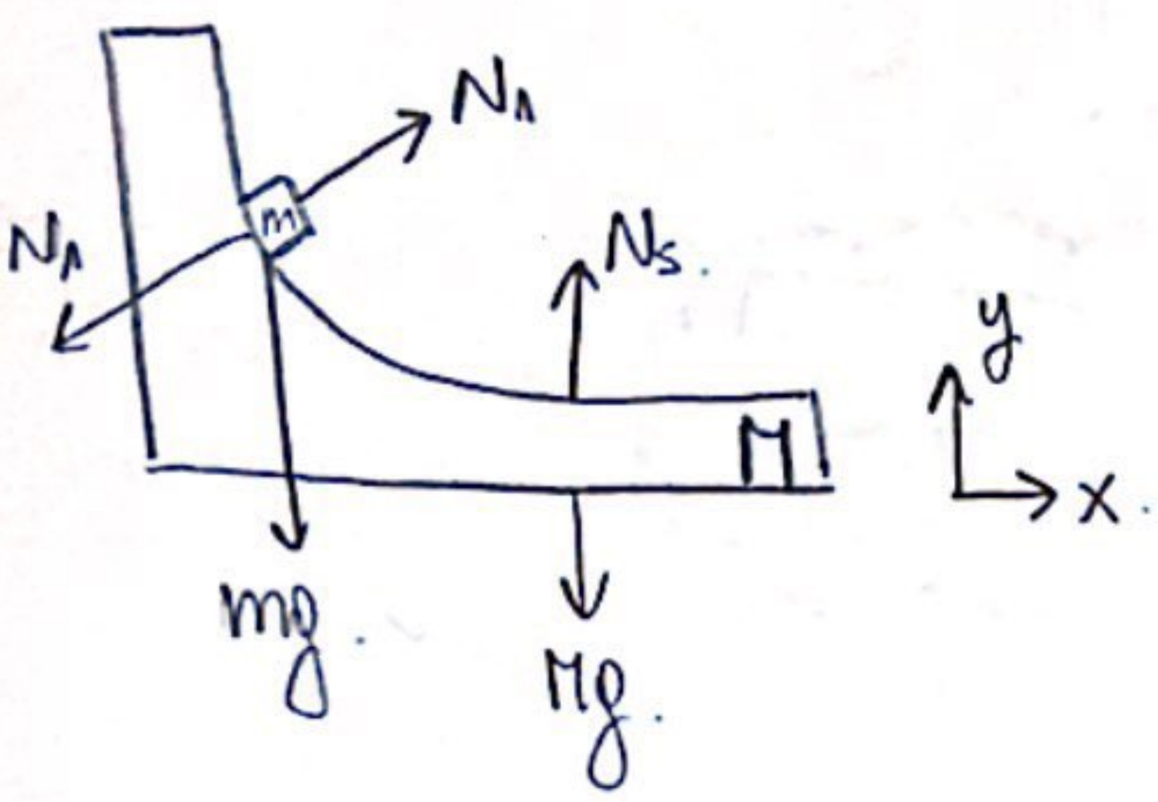
$$\Rightarrow \boxed{\ell = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{V_0^2}{g} \sin(2\theta_0) - \beta L \right)}$$

Reemplazando $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\beta = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = \frac{3}{2}\left(\frac{V_0^2}{g} \sin 2\theta_0 - \frac{L}{3} \right) = \frac{3 V_0^2 \sin 2\theta_0}{2g} - \frac{L}{2}}$$

P3 a) $v_{im} = 0 \to$ se encuentra en reposo
$v_{iM} = 0$ $\Bigg\}$ $p_i = 0$

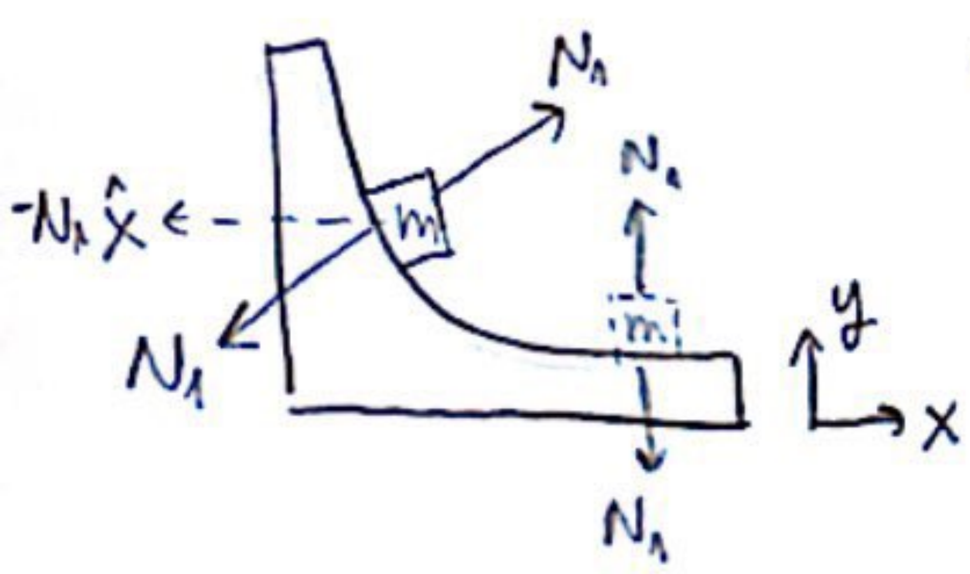
¿Qué pasa con el momentum a lo largo del movimiento?



• $\hat{y}$: peso de ambas masas y la normal del suelo
↳ Fuerzas externas $\Rightarrow$ El momentum en $\hat{y}$ NO se conserva

• $\hat{x}$: sólo hay presencia de fuerzas internas
↳ Componente en $\hat{x}$ de la normal de las masas. (Fuerza acción-reacción).
$\Rightarrow$ El momentum en $\hat{x}$ SI se conserva. y $p_{ix} = 0$

Como m parte el movimiento desde una altura h y no hay fuerzas disipativas, a medida que va cayendo por la cuña, su velocidad aumenta en $\hat{x}$.
Luego, debido a la fuerza que ejerce m sobre la cuña, la componente horizontal de esta fuerza hará que la cuña acelere y por ende tendrá una velocidad en $-\hat{x}$.



$\therefore$ La masa m se mueve hacia la derecha
La cuña se mueve hacia la izquierda. $\Big\}$ $p_{fx} = m v_m - M \cdot v_M$
En el tramo horizontal, ambas se mueven con V cte.

Así, tenemos lo sgte.: $p_{ix} = p_{fx} \iff 0 = m v_m - M v_M \Rightarrow m v_m = M v_M$ **(1)**

Ahora, por conservación de energía.

• $E_i = \cancel{K_m + K_M}^{\,0} + U_m + U_M = mgh + U_M$ ↱ depende de la altura del CM pues no es una masa puntual

• $E_f = K_m + K_M + \cancel{U_m}^{\,0} + U_M = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 + U_M$

$\Rightarrow mgh + \cancel{U_M} = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 + \cancel{U_M} \Rightarrow 2mgh = m v_m^2 + M v_M^2$ **(2)**

De la ec. (1): $v_M = \dfrac{m v_m}{M}$ / Reemplazando en (2)

$$2mgh = m v_m^2 + M\left(\frac{m v_m}{M}\right)^2 \iff 2mgh = v_m^2\left(m + \frac{m^2}{M}\right)$$

$$2\cancel{m}gh = v_m^2 \cdot \cancel{m}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$2gh = v_m^2\left(\frac{M+m}{M}\right) \Rightarrow \frac{2Mgh}{M+m} = v_m^2$$

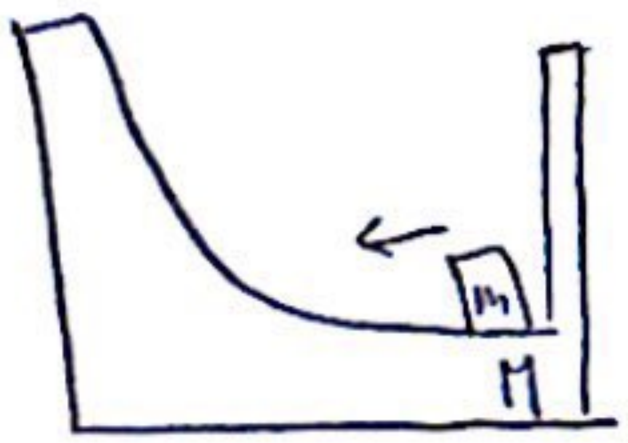
$$\therefore \boxed{v_m = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}}$$

hacia la der.

Reemplazando v_m en (1): $\boxed{v_M = \dfrac{m}{M}\sqrt{\dfrac{2Mgh}{M+m}}}$

hacia la izq.

b) Choque elástico $\Rightarrow$ se conserva el momentum y la energía cinética.



Tenemos que $p_i = 0$ y que la masa m se devuelve hacia la izq. debido al choque elástico.

$\Rightarrow$ tendremos las mismas ecs. de la parte (a) y, por ende, v_m y v_M también. Sin embargo, v_m será hacia la izq. y v_M hacia la der. //