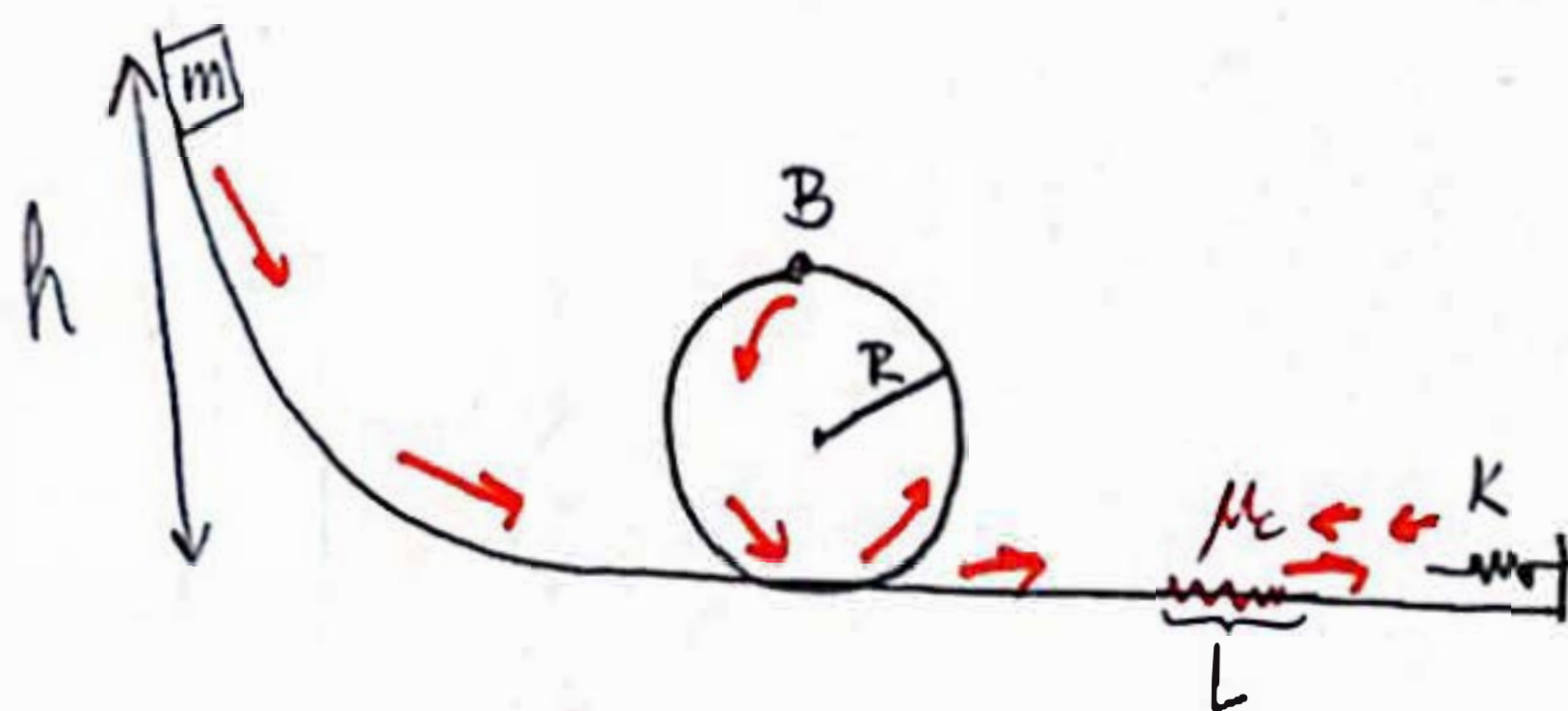
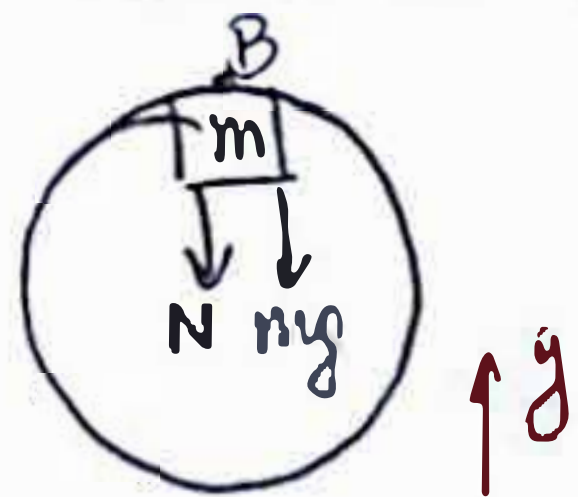




a) Velocidad en el punto B.



$$\sum F_y: -N - mg = -m \cdot a_c$$

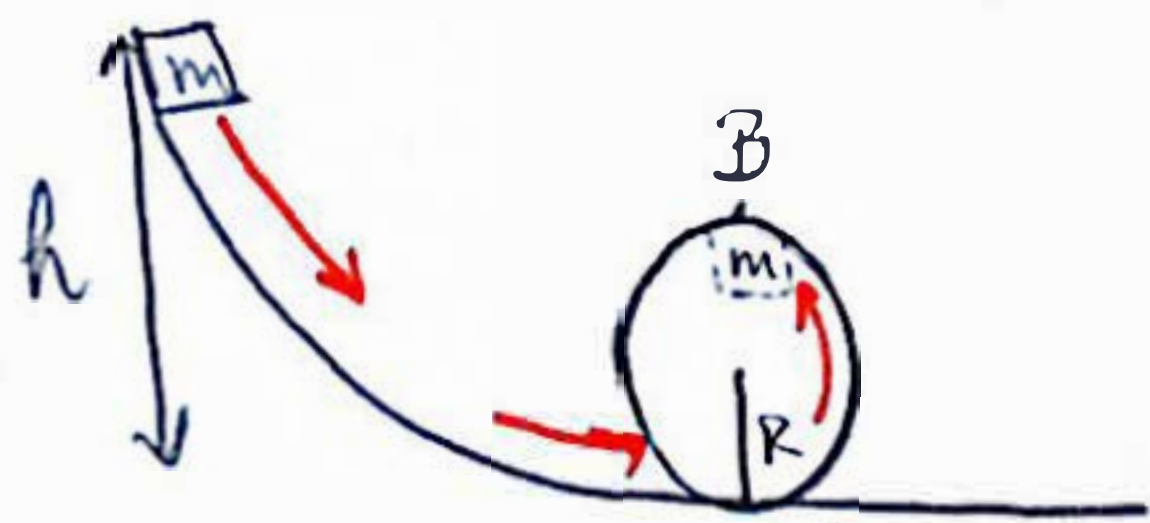
estamos en un mov. circular y sabemos que la a_c siempre apunta hacia el centro.
como $\hat{y}$ lo definimos $\oplus$ hacia arriba $\Rightarrow a_c$ es $\ominus$

h es el mínimo valor para que m no despegue $\Rightarrow N=0$ (Condición "a punto de despegar").

$$\Rightarrow mg = m \cdot a_c \quad / \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$g = \frac{v^2}{R} \quad \therefore v = \sqrt{gR}$$

b) Altura h . $\rightarrow$ Como tenemos v_B , podemos analizar la conservación de energía desde que cae hasta llegar al punto B.
¿por qué se conserva la energía? porque no hay fuerzas disipativas como el roce.



$$E_i = U_i + K_i = mgh$$

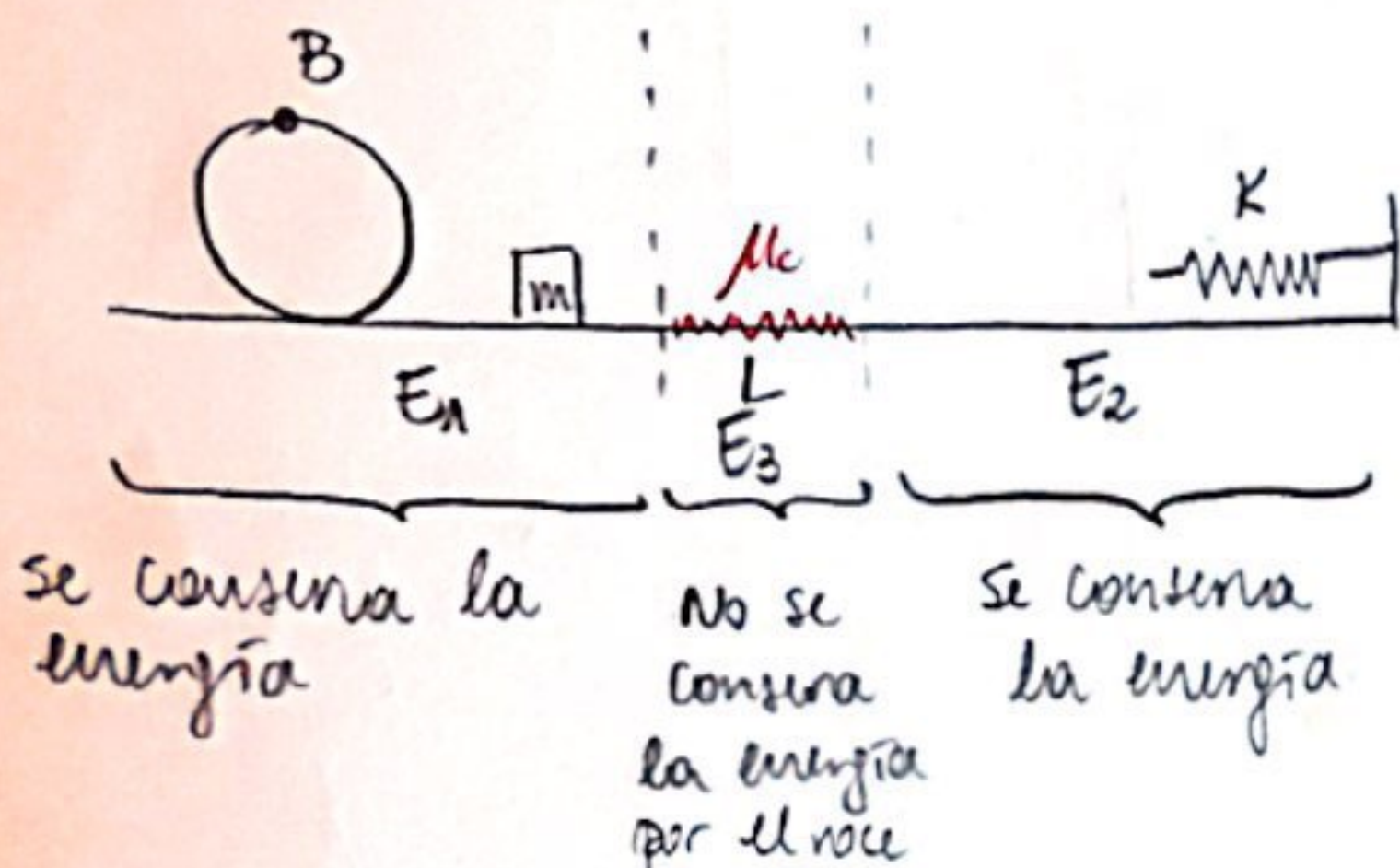
$$E_B = U_B + K_B = mg(2R) + \frac{1}{2}mv_B^2 = 2mgR + \frac{1}{2}mgR = \frac{5}{2}mgR$$

Por conservación de la energía: $E_i = E_B$

$$mgh = \frac{5}{2}mgR \quad \therefore h = \frac{5}{2}R$$

c) Largo L.

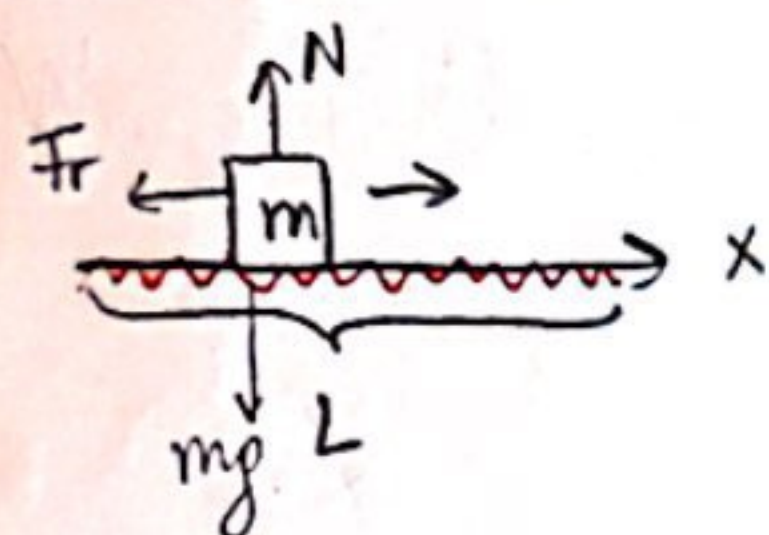
Dividimos el trayecto que sigue la masa en intervalos.



Por las partes anteriores:

- $E_1 = E_3 = \frac{5}{2} m g R$ (energía se conserva).
- $E_3 = 0$ pues luego de estar en contacto con el resorte, entra de nuevo a la zona de roce y se detiene.
- $E_2 < E_1$ pues el roce quita energía.

* Cuando la masa pasa por la superficie con roce: disminuye la energía. Calculamos esta energía:



$$N = mg \Rightarrow Fr = -\mu_c \cdot mg$$

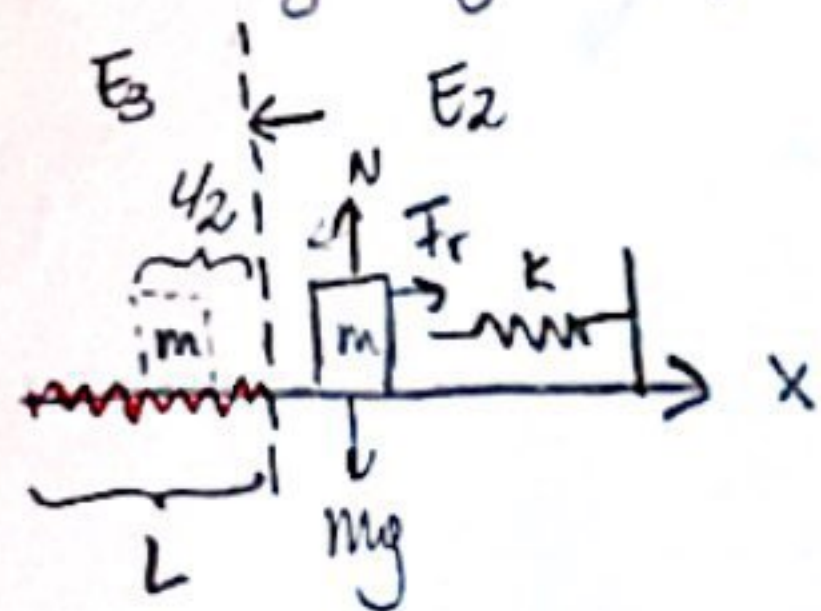
$$\Rightarrow W_{Fr} = \vec{Fr} \cdot \vec{d} = -\mu_c m g \hat{x} \cdot L \hat{x}$$

$$W_{Fr} = -\mu_c m g L$$

el roce quitó $\mu_c m g L$ a E_1

Además: $W_{Fr} = \Delta E = E_2 - E_1 \Rightarrow -\mu_c m g L = E_2 - \frac{5}{2} m g R \Rightarrow E_2 = \frac{5}{2} m g R - \mu_c m g L$

* Cuando la masa pasa por segunda vez por la superficie con roce: este hace que se detenga y disipa toda la energía E_2



$$Fr = \mu_c \cdot mg \Rightarrow W_{Fr} = (\mu_c m g \hat{x}) \left(\frac{L}{2} \hat{x} \right) = \mu_c m g \frac{L}{2} = W_{Fr}$$

Trabajo que realiza el roce al final del movimiento

Como $W_{Fr} = E_3 - E_2 \Rightarrow -\mu_c m g \frac{L}{2} = 0 - \frac{5}{2} m g R + \mu_c m g L \Rightarrow \frac{5}{2} m g R = \frac{3}{2} \mu_c m g L$

$$\therefore L = \frac{5}{3} \frac{R}{\mu_c}$$

d) Máx. compresión del resorte.

E_2 es la energía antes de entrar en contacto con el resorte. Como en este trayecto no hay fuerzas disipativas: $E_2 = U_e = \frac{1}{2} K (\Delta x)^2$

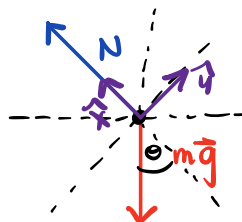
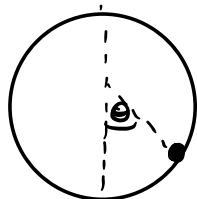
$$\Rightarrow \frac{1}{2} K (\Delta x)^2 = \frac{5}{2} m g R - \mu_c m g \left(\frac{5}{3} \frac{R}{\mu_c} \right) = \frac{5}{2} m g R - \frac{5}{3} m g R = \frac{5}{6} m g R$$

$$\Rightarrow (\Delta x)^2 = \frac{5}{3} \frac{m g R}{K} \therefore (\Delta x) = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{m g R}{K}} //$$

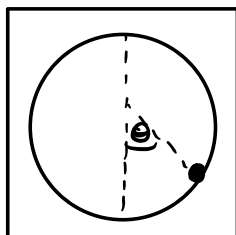
P3

(a) Comenzamos con los DCL:

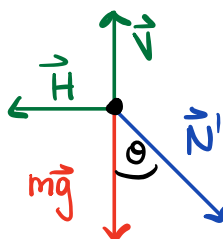
Para la bolita:



Para el cubo:



- $\vec{g}$ actúa sobre M.
- Existe una fuerza N' de reacción a la normal de la bolita.
- Existen fuerzas de contacto asociadas a las paredes (el bloque se mueve gracias a N').



(b) Calcular N en función de θ :

Definimos sist. de ref. ^{*} y escribimos 2da ley para bolita:

$$\text{Vectorial: } N\hat{x} - mg\cos\theta\hat{x} - mg\sin\theta\hat{y} = m(a_x\hat{x} + a_y\hat{y})$$

$$\text{Por componentes: } \begin{array}{l} \hat{x} \quad N - mg\cos\theta = m a_x \quad (1) \\ \hat{y} \quad -mg\sin\theta = m a_y \quad (2) \end{array}$$

Nos enfocamos en (1) e imponemos condiciones:

•> Como describe un mov. circular $\rightarrow a_x = a_c = \frac{v^2}{R}$

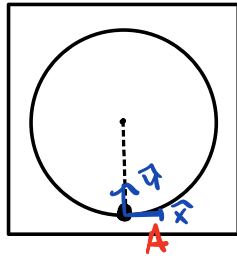
Reemplazando en (1) y despejando N : positiva pues apunta hacia dentro ($x > 0$)

$$N = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{R} \quad (3)$$

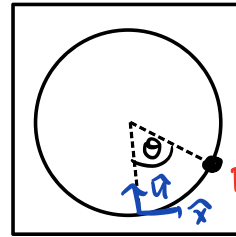
•> ¿Cómo conocemos v ? Energía !

No hay fuerzas disipativas $\Rightarrow \Delta E = 0$ (la energía se conserva).

Definimos un nuevo sist. de ref. ^{en azul} y escogemos dos puntos:



A: > Donde U es mínimo (pues es la altura más baja posible).



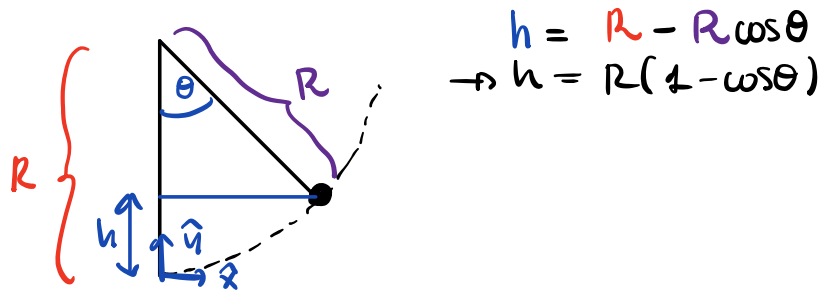
B: > Donde hay altura y rapidez arbitraria en un ángulo θ .

•> Donde la rapidez de la bolita es v_0

$$\rightarrow E_A = \frac{1}{2}mv_0^2 + \cancel{mgh}^0; E_B = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

¿Cómo obtener h ?

De la fig. del punto B :



Luego

$$E_B = \frac{1}{2} m v^2 + m g R (1 - \cos \theta)$$

y

$$E_A = \frac{1}{2} m v_0^2$$

➤ Operando $\Delta E = E_A - E_B = 0$, podremos encontrar v en función de θ y datos.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m g R (1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2 g R (1 - \cos \theta)$$

Reemplazando en (3) :

$$\begin{aligned} N &= m g \cos \theta + \frac{m}{R} (v_0^2 - 2 g R + 2 g R \cos \theta) \\ &= \frac{m v_0^2}{R} - 2 m g + m g \cos \theta + 2 m g \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N = \frac{m v_0^2}{R} - 2 m g + 3 m g \cos \theta$$

(c) Rango de V_0 tq bolita estú en contacto con superficie y bloque NO se levanta:

•> Consideramos 2da ley en M:

$$\begin{aligned} \hat{x} \downarrow & -H - N' \sin \theta = M a_x \\ \hat{y} \downarrow & V - N' \cos \theta - Mg = M a_y \end{aligned}$$

En el caso crítico en que NO se mueve (pero sí está a punto de despegarse):

$$\begin{aligned} V &= 0 \quad (\text{Contacto, cond. de despegue}) \\ a_y &= 0 \quad (\text{No se mueve}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{En } \hat{y}: \quad -N' \cos \theta - Mg = 0 \quad (4)$$

$$N \geq 0 \rightarrow \frac{mV_0^2}{R} - 2mg + 3mg \cos \theta \geq 0$$

¿Cuál es el mínimo $N \geq 0$? Viendo la expresión, θ es la única variable; $\cos \theta \in [-1, 1]$; si $\cos \theta$ es mínimo $\Rightarrow N$ será mínimo tal que $N \geq 0$.

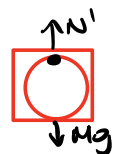
Esto ocurre cuando $\cos \theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$.

$$\text{Evaluando: } N = \frac{mV_0^2}{R} - 2mg - 3mg \geq 0 \quad (5)$$

→ Volviendo sobre (4): $N' - Mg = 0$. Por 3ra ley se tiene que $N - Mg = 0$. Además, para que no se levante:

$$N \leq Mg \quad (6)$$

← Que la normal NO le gane al peso



Sumando (5) y (6)

$$0 \leq N \leq Mg \Rightarrow 0 \leq \frac{mv_0^2}{R} - 5mg \leq Mg \quad / + 5mg \quad / \cdot \frac{R}{m}$$

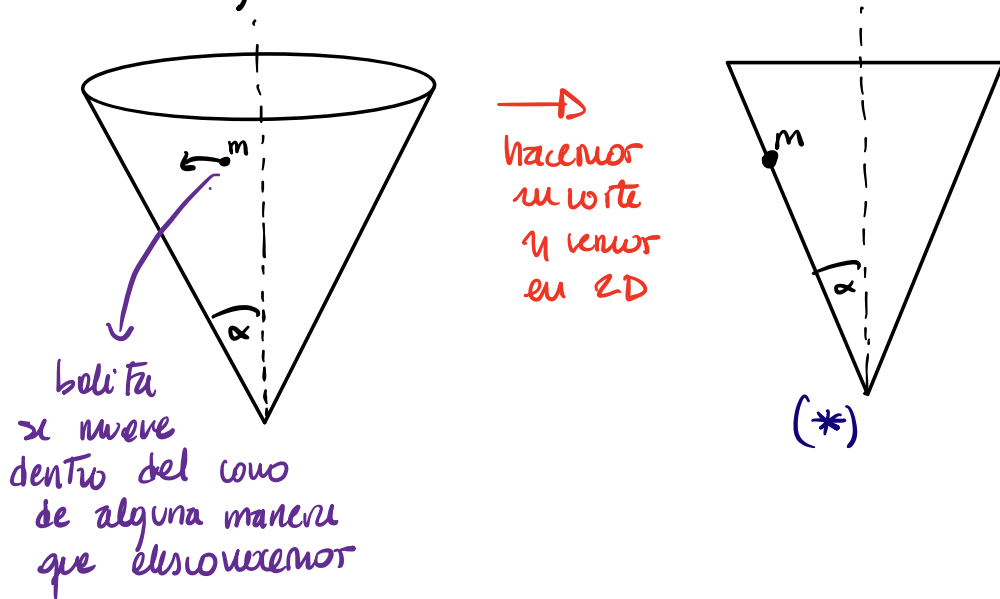
$$\frac{5mgR}{m} \leq v_0^2 \leq (5mg + Mg) \frac{R}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{5gR \leq v_0^2 \leq \left(5 + \frac{M}{m}\right) gR}$$

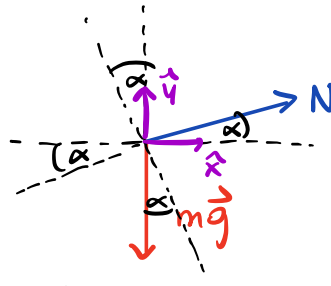
P2

(a) Cond. que se debe cumplir para que bolita NO deslice:

De la figura tendremos:



Hacemos un DCL para la bolita, según la figura (*)



Planteamos segunda ley:

$$N \cos \alpha \hat{x} + N \sin \alpha \hat{y} - mg \hat{y} = m a_x \hat{x} + m a_y \hat{y}$$

Por componentes:

$$\hat{x}) \quad N \cos \alpha = m a_x \quad (1)$$

$$\hat{y}) \quad N \sin \alpha - mg = m a_y \quad (2)$$

Viendo las ecuaciones de movimiento en $\hat{y}$, para que la bolita no se deslice hacia el suelo, necesitamos que:

$$N \sin \alpha \geq mg$$

Es decir, que la componente vertical de la fuerza normal sea mayor que el peso.

¿Por qué?

• Si $N \sin \alpha > mg \rightarrow N \sin \alpha - mg > 0$; pero de la ec. para $\hat{y}$

$$N \sin \alpha - mg = ma_y > 0 \Rightarrow a_y > 0$$

$\Rightarrow$ la bolita acelera en $\hat{y}$ hacia los positivos, no desliza hacia el suelo.

• Si $N \sin \alpha < mg \rightarrow N \sin \alpha - mg = ma_y < 0 \Rightarrow a_y < 0$

$\Rightarrow$ la bolita acelera en $\hat{y}$ hacia los negativos, por lo que terminaría en el suelo (fondo del cono).

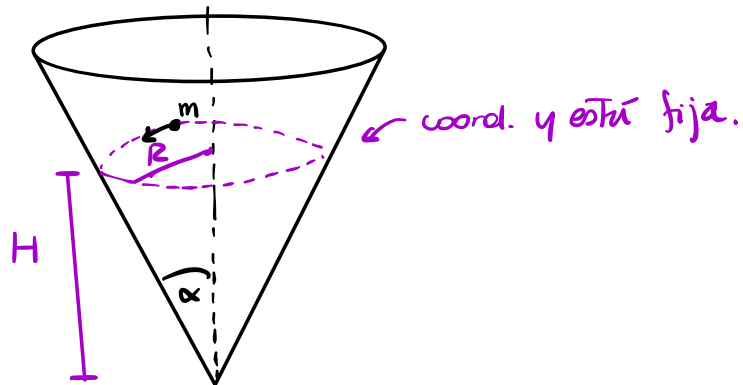
• **Caso crítico:** No acelera :

$$\rightarrow N \sin \alpha = mg \Rightarrow N \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow ma_y = 0 \Rightarrow a_y = 0$$

En este caso tenemos la cond. de equilibrio estático, de modo que en $\hat{y}$ la bolita está fija. (a una altura, digamos, H).

$\rightarrow$ En ese caso, si no se mueve en $\hat{y}$, la bolita se mueve en un plano horizontal a una altura H , el que coincide con una circunferencia de radio R .
(si hacemos un corte a una altura H al cono obtenemos -

por una circunferencia de radio R :



(b) Encontrar $V_{\min}$ tq hay mov. circular:

Si hay mov. circular, se cumplen las sytes condiciones:

$$a_y = 0 \quad (\text{de (a)})$$

$$a_x = \frac{V_{\min}^2}{R} \quad \leftarrow \text{esto por } \hat{x} \text{ coincide con la dirección radial del mov.}$$

En las ecuaciones de mov. (1) y (2):

$$\hat{x} \quad N \cos \alpha = \frac{m V_{\min}^2}{R} \quad (3)$$

$$\hat{y} \quad N \sin \alpha - mg = 0 \quad (4)$$

De (4) despejamos N : $N = \frac{mg}{\sin \alpha}$. En (3)

$$\cancel{mg} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cancel{m} \frac{V_{\min}^2}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{\min} = \sqrt{\frac{gR}{\tan \alpha}}}$$

(c) Dem que si $\alpha \rightarrow 0$ no puede haber Mov. circular.

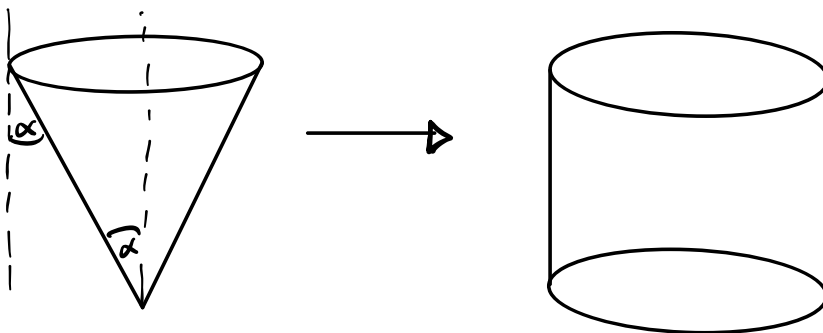
De la expresión que tenemos de $V_{\min}$:

$$V_{\min} = \sqrt{\frac{gR}{\tan \alpha}}, \text{ si } \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \tan \alpha \rightarrow 0$$

luego tenemos algo del estilo:

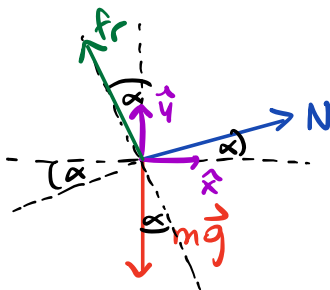
$$V_{\min} \sim \sqrt{\frac{gR}{0}} \rightarrow \infty ; \text{ por lo que necesitaríamos una velocidad infinita, lo que no es posible!}$$

• Otra forma de verlo es que si $\alpha \rightarrow 0$ entonces:



luego la normal es perpendicular al peso y no hay fuerza que lo compense para que no se caiga la bolita.

(d) Si hay roce, entonces el DCL cambia:



la 2da ley de Newton, por componentes:

$$\hat{x}) \quad N \cos \alpha - f_r \sin \alpha = m a_x \quad (5)$$

$$\hat{y}) \quad f_r \cos \alpha + N \sin \alpha - mg = m a_y \quad (6)$$

Si imponemos que hay mov. circular:

$$\rightarrow a_y = 0$$

$$\rightarrow a_x = \frac{v_{\text{mín}}^2}{R}$$

Pero además: $\rightarrow f_r = \mu_c N$

Reemplazando en (5) y (6)

$$\hat{x}) \quad N \cos \alpha - \mu_c N \sin \alpha = \frac{m v_{\text{mín}}^2}{R} \quad (4)$$

$$\hat{y}) \quad \mu_c N \cos \alpha + N \sin \alpha - mg = 0 \quad (8)$$

De (8) encontramos N:

$$N(\mu_c \cos \alpha + \sin \alpha) = mg$$

$$\Rightarrow N = \frac{mg}{\mu_c \cos \alpha + \sin \alpha}$$

en (7):

$$N(\cos \alpha - \mu_c \sin \alpha) = \frac{m v_{\text{mín}}^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{mg(\cos \alpha - \mu_c \sin \alpha)}{(\mu_c \cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{m v_{\text{mín}}^2}{R}$$

$$\Rightarrow v_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{gR(\cos \alpha - \mu_c \sin \alpha)}{(\mu_c \cos \alpha + \sin \alpha)}}$$

Notar que si $\mu_c \rightarrow 0$

$$\Rightarrow v_{\min} = \sqrt{\frac{gR}{\tan \alpha}} \quad \leftarrow \text{Recuperamos el resultado anterior!}$$

$\Rightarrow$ Si $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{\frac{gR}{\mu_c}}$ $\leftarrow$ Con roce si puede haber mov. circular en un cilindro?