

Resumen / Repaso

- > Trabajo: Da cuenta del aporte de una fuerza $\vec{F}$ al desplazamiento de un cuerpo $\vec{d}$.

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad \rightarrow \text{en } [W] = \text{Nm} = \text{J}$$

↖ Producto punto.

- > Trabajo neto: Trabajo total que realizan las fuerzas que actúan sobre un cuerpo:

$$W_{\text{neto}} = \vec{F}_{\text{neto}} \cdot \vec{d} = \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{d} \right) = W_{F_1} + W_{F_2} + \dots + W_{F_n}$$

- > Energía:

$K \propto v^2$	↔	Cinética:	$K = 1/2 \cdot m v^2$	↖ es la rapidez del cuerpo
$U \propto h$	↔	Pot. gravitatoria:	$U = m g h$	↖ altura: hay que def $U=0$
$U_e \propto \Delta x^2$	↔	Pot. elástica:	$U_e = \frac{1}{2} k \Delta x^2$	↖ estiramiento del resorte. ($l_{\text{actual}} - l_{\text{natural}}$)

- > Energía mecánica:

$$E = K + U$$

- > Si hay fuerzas disipativas: (como por ej el roce)

$$\Delta E = E_f - E_i = W \quad \leftarrow \text{hay disipación (pérdida de energía)}$$

↑
Diferencia de energía mecánica en dos puntos diferentes

- > Si NO hay fuerzas disipativas: la energía mecánica se conserva ▼

$$\Delta E = E_f - E_i = 0 \Rightarrow E_f = E_i$$

¿Cómo abordar problemas de energía?

1.- Definir sistema de ref: Para definir donde está $U=0$

↳ Por ej en $U = mgh$ escoger donde $h=0$.

2.- Escoger lugares o instantos de tiempo donde se analiza la energía del sistema:

→ Calcular K y U en ambos puntos

→ Calcular E en ambos puntos, i.e., E_f y E_i .

→ Calcular ΔE

→ Si hay fuerzas disipativas: $\Delta E = W$

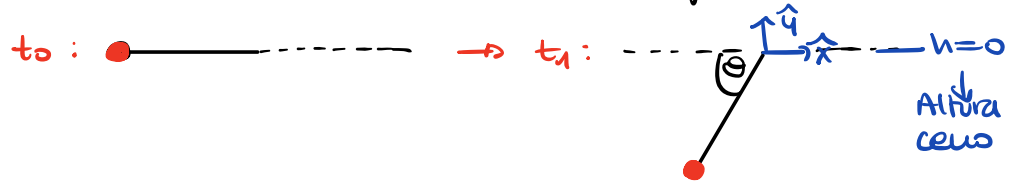
→ Si no hay fuerzas disipativas: $\Delta E = 0$

3.- Encontrar inconsistencia con las ecuaciones obtenidas (si es necesario, usar conservación)

↳ Por ej en el cálculo de Normal para el trabajo por la fuerza de roce.

Pauta P1 Aux 9:

→ la masa se deja caer desde el reposo de la siguiente forma:



Definimos un eje de referencia azul (en azul).

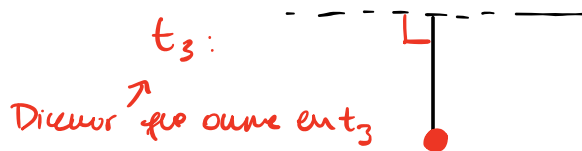
(a) ¿Cuándo K es máx? Como no hay fuerzas disipativas actuando $\Rightarrow \Delta E = 0$ (la energía mecánica se conserva). Para que esto se cumpla, debe existir un balance entre K y U . i.e. si una aumenta, la otra disminuye (y viceversa). De este modo:

$$K_{\max} \Leftrightarrow U_{\min}$$

$\Rightarrow K$ es máxima cuando U es mínima. Por otro lado

$$U = mgh$$

Mientras menor sea la altura, menor será U . Así, de la figura, la menor altura se alcanza cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir:



Además, por la fig:

$$U = -mgl \sin \theta = -mgl \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

U cuando K es máxima

De este modo la energía mecánica del sistema es:

$$E = \frac{1}{2} mV^2 - mgl$$

→ rapidez cuando K es máx.

(b) Como no hay fuerzas disipativas, $\Delta E = E_f - E_i = 0$.
 Consideramos la energía del sistema en dos instantes de tiempo: t_0 y t_3 (consideramos E_i en t_0 y E_f en t_3):

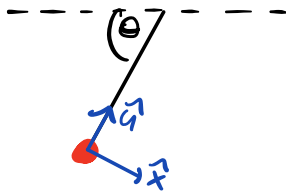
$$\rightarrow E_f = \frac{1}{2} mV^2 - mgl ; E_i = 0 \leftarrow \text{partícula en reposo } (v=0) \text{ y a altura } 0 \text{ } (u=0)$$

$$\Rightarrow \Delta E = E_f - E_i = 0$$

(por lo que $k=U=0$)

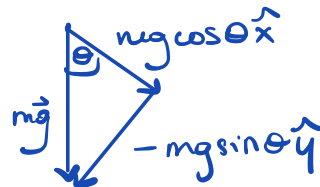
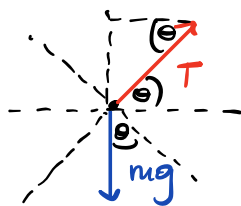
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} mV^2 - mgl = 0 \Rightarrow V = \pm \sqrt{2gl}$$

(c) Supongamos que en el instante en que k es la mitad de $k_{\max}$ tenemos:



Definimos un nuevo eje coordenado (en azul) por comodidad (¡ojo! esto no cambia nuestros resultados de antes).

Hacemos el DCL:



2da ley:
$$\begin{cases} \hat{x} \\ \hat{y} \end{cases} \begin{cases} mg \cos \theta = m a_x \\ T - mg \sin \theta = m a_y \end{cases}$$

Nos enfocamos en ec. de mvto. para $\hat{y}$: hipotetizamos condiciones:

1.- la masa describe una circunferencia en su mov. luego
 $a_y = a_c = \frac{mV^2}{r}$ $\leftarrow$ esto nos sugiere que $\hat{y}$ apunta en la dirección radial.

viendo la ecuación de mov. para $\hat{y}$

2- Con esto, nos interesa conocer T en el instante en que $k = \frac{k_{\max}}{2}$. Por lo que necesitamos conocer θ^* y v^* el ángulo y rapidez cuando $k = \frac{k_{\max}}{2}$.

Así; la ec. de mvto. para $\hat{y}$:

$$T - mg \sin \theta^* = \frac{m v^{*2}}{l} \quad (*)$$

¿Cómo encontrar θ^* y v^* ??

θ^* : llamemos U^* a U cuando $k = \frac{k_{\max}}{2}$. la energía cinética es la mitad de su máximo.

$$\Rightarrow U^* = -mg l \sin \theta^* \quad (**)$$

Por otro lado, Por cons. de la energía:

$$E = k_{\max} + U_{\min} ; E = \frac{k_{\max}}{2} + U^*$$

Restando ambas ecs:

$$0 = \frac{k_{\max}}{2} + U_{\min} - U^* \Rightarrow U^* = \frac{k_{\max}}{2} + U_{\min}$$

Reemplazando con lo hecho en (a) y (b):

$$U^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \cdot 2gl - mgl \Rightarrow U^* = -\frac{1}{2} mgl$$

Reemplazando en (**)

$$-mgl \sin \theta^* = -\frac{1}{2} mgl \Rightarrow \sin \theta^* = \frac{1}{2}$$

v^* : Aplicamos meramente cons. de la energía, para el instante inicial to y para cuando $k = \frac{k_{\max}}{2}$.

$$\Rightarrow E_i = 0 ; E_f = \frac{1}{2} m v^{*2} - \frac{mgl}{2} \quad \text{por lo cual es nulo}$$

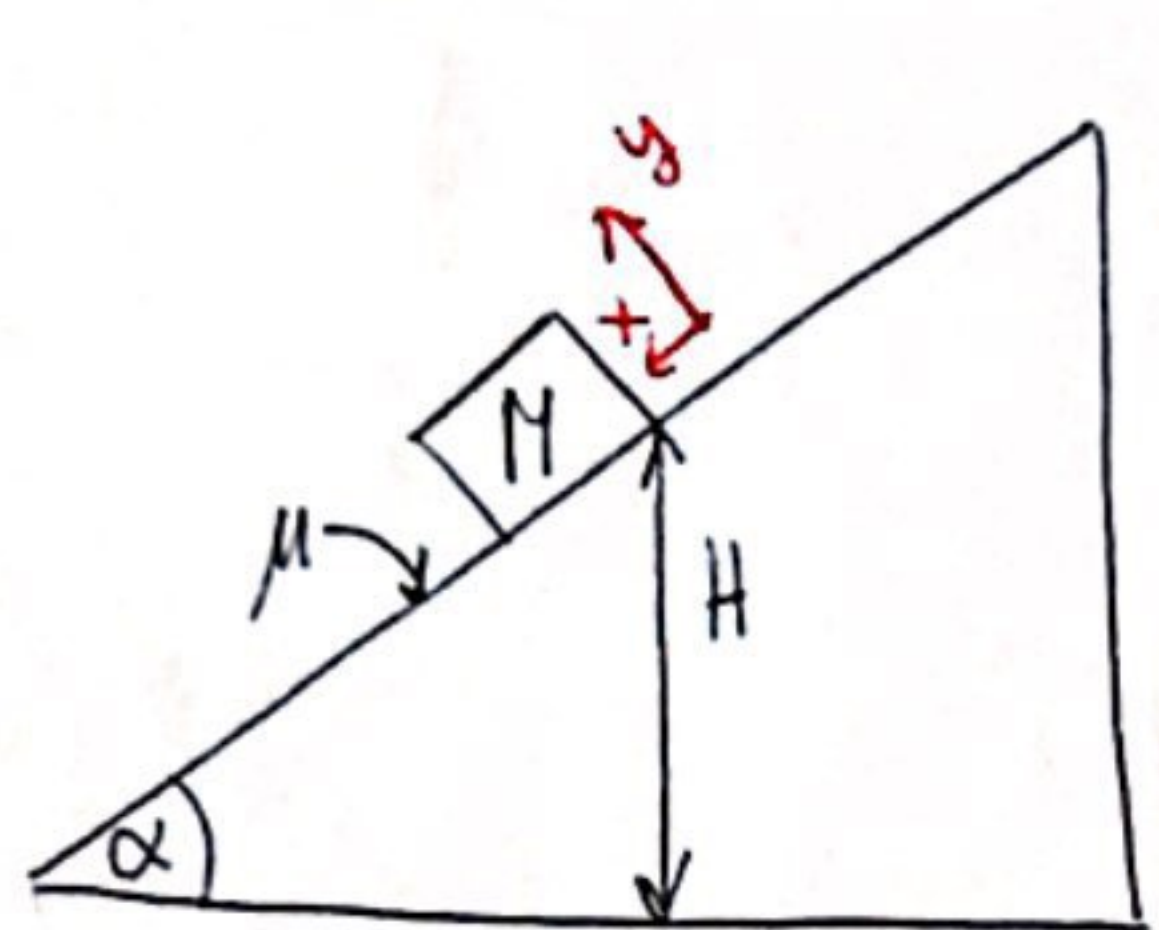
$$\Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v^{*2} - \frac{mg\ell}{2} = 0 \Rightarrow v^* = \sqrt{g\ell}$$

Reemplazando ambos resultados en (*)

$$T - mg \cdot \frac{1}{2} = \frac{m}{\cancel{\ell}} g \cancel{\ell} \Rightarrow T = \frac{mg}{2} + mg = \frac{3}{2} mg$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{3}{2} mg} \quad \text{Que es el resultado que se nos pide.}$$

P2



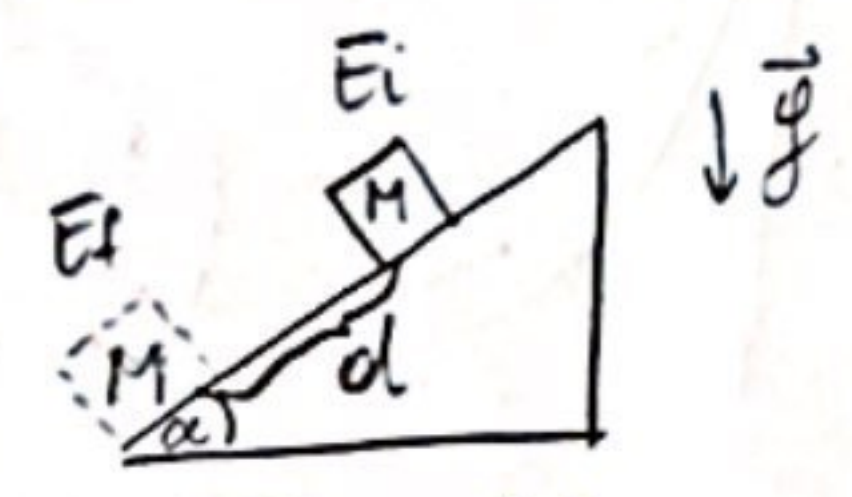
$W_{Fr}?$
 $W_p?$

Sabemos que el roce es una fuerza no conservativa: podemos utilizar $W_{Fr} = \Delta E_m \rightarrow$ variación de la energía mecánica.

$E_i = K_i + U_i = MgH$ parte del reposo.

* para el análisis del signo de la energía potencial: el mínimo de la energía potencial es en el suelo, por lo que cuando la masa se encuentra arriba, será positiva.

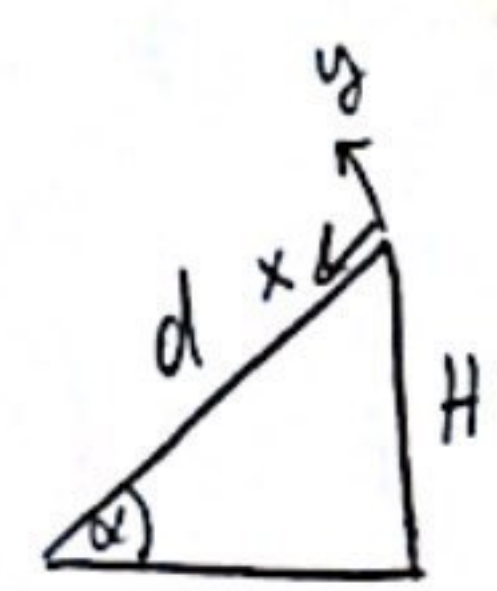
$E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2} M v_f^2$ } La energía potencial se convierte en cinética



$\Rightarrow \Delta E_m = E_f - E_i = \frac{1}{2} M v_f^2 - MgH$... ¿conocemos v_f ? NO. $\rightarrow v_f^2 = v_i^2 + 2ad$... ¿a, d?

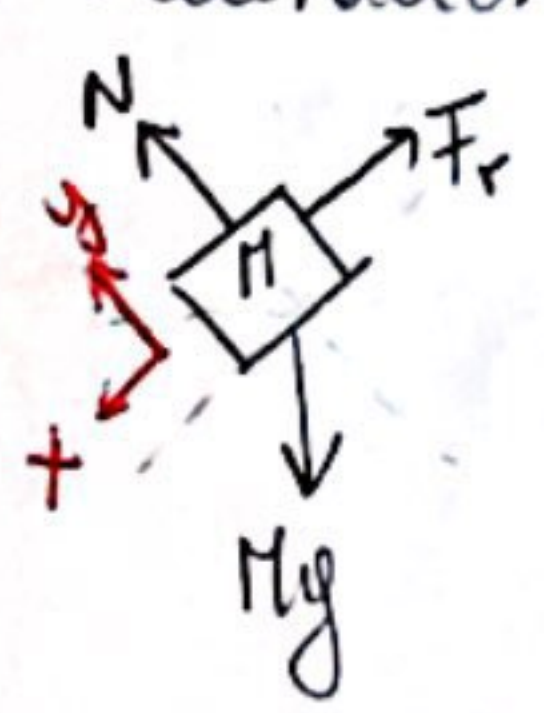
velocidad con la que llega al suelo

Por trigonometría:

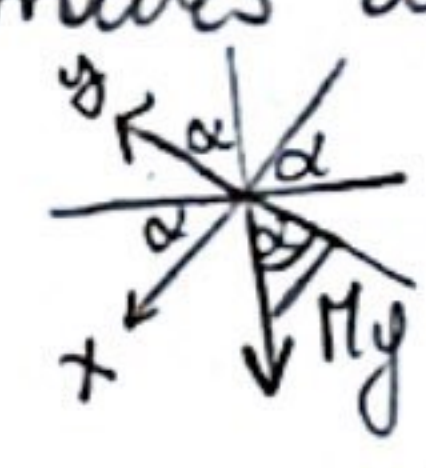


$\sin \alpha = \frac{H}{d} \Rightarrow d = \frac{H}{\sin \alpha}$

La aceleración la podemos calcular a través del análisis de fuerzas:



$\vec{P} = -Mg \cos \alpha \hat{y} + Mg \sin \alpha \hat{x}$ (*)



(1) $\sum F_x: Mg \sin \alpha - Fr = M \cdot a$

(2) $\sum F_y: N - Mg \cos \alpha = 0$ no se mueve en y. $\Rightarrow N = Mg \cos \alpha$

De (1): $Mg \sin \alpha - \mu N = Ma$ / Reemplazando N.

$Mg \sin \alpha - \mu Mg \cos \alpha = Ma \Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$

volviendo a (*): $v_f^2 = 2 \cdot g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot \frac{H}{\sin \alpha}$

Así: $\Delta E_m = \frac{1}{2} M \left(2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot \frac{H}{\sin \alpha} \right) - MgH$

$\Delta E_m = MgH(1 - \mu \cot \alpha) - MgH = -\mu MgH \cot \alpha = \Delta E_m$

$\therefore W_{Fr} = -\mu MgH \cot \alpha$

Ahora, para calcular el trabajo realizado por el peso, podemos utilizar:

$$W_p = \vec{p} \cdot \vec{d}$$

De lo anterior: $\vec{d} = \frac{H}{\sin \alpha} \hat{x}$ y de (*): $\vec{p} = Mg \sin \alpha \hat{x} - Mg \cos \alpha \hat{y}$

$$\Rightarrow W_p = (Mg \sin \alpha \hat{x} - Mg \cos \alpha \hat{y}) \cdot \frac{H}{\sin \alpha} \hat{x} = MgH \cancel{\hat{x} \cdot \hat{x}}^1 - Mg \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cancel{\hat{y} \cdot \hat{x}}^0 \text{ perpendiculares.}$$

$$\therefore W_p = MgH //$$