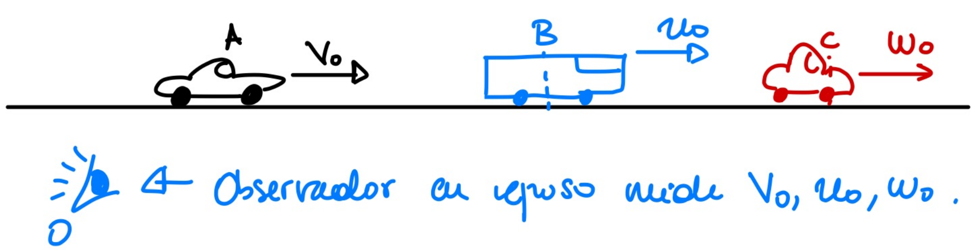
FI1000-1 Introducción a la Física Clásica
Profesor: Ignacio Bordeu
Auxiliares: Javier Cubillos & Berenice Muruaga
Auxiliares taller: Pablo González & Alejandro Cartes
Ayudante: Amaru Moya

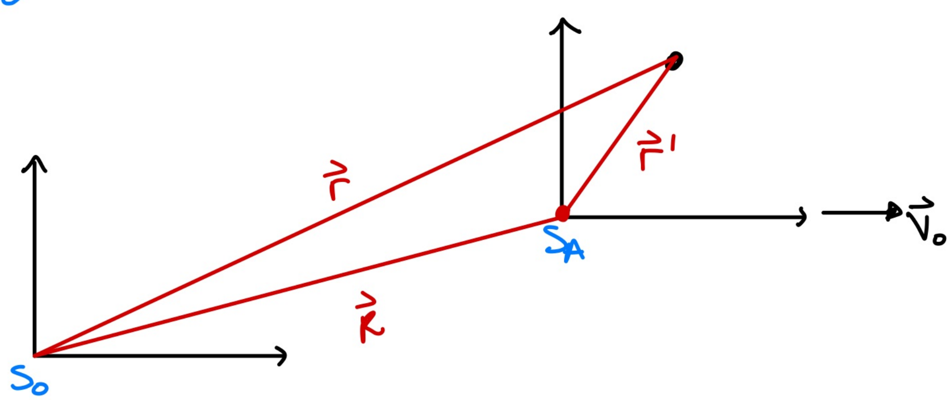
Pauta Auxiliar #5: Movimiento relativo

P1. Solución:

Idealmente este problema nos ayudará a entender un poco mejor el movimiento relativo.

¿Cuál es la intuición del problema? Un esquema del mismo se presenta a continuación:





Tenemos entonces un observador O, con un marco de referencia S_O en reposo, que mide las rapideces V_0, u_0, ω_0. En este problema, el auto A (y su marco de referencia S_A) corresponde al marco de referencia en movimiento, y los autos B y C a las partículas que queremos conocer su posición y/o velocidad.

Para el observador en reposo tendremos que:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \tag{1}$$

En este caso, $\vec{r}$ es la posición de alguno de los autos B o C según O (S_O), $\vec{r}'$ la posición de alguno de los autos B o C según el auto A (S_A), y $\vec{R}$ El vector posición entre S_O y S_A. Del mismo modo, para las velocidades tenemos:

$$\vec{v} = \vec{v}_{AO} + \vec{v}' \tag{2}$$

Con $\vec{v}_{AO}$ la velocidad de A medida por O. Como O mide que A se mueve con velocidad V_0, y estamos en una dimensión, $\vec{v}_{AO} = V_0\hat{\imath}$, reemplazando en (2):

$$\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{v}' \tag{3}$$
$$\implies v = V_0 + v' \tag{4}$$

Ahora, ¿Qué hacemos con esta ecuación? v corresponde a la rapidez de los vehículos según O (S_O), y v' corresponde a la rapidez de los vehículos según A (S_A), que es precisamente lo que se nos pide calcular, de modo que buscamos:

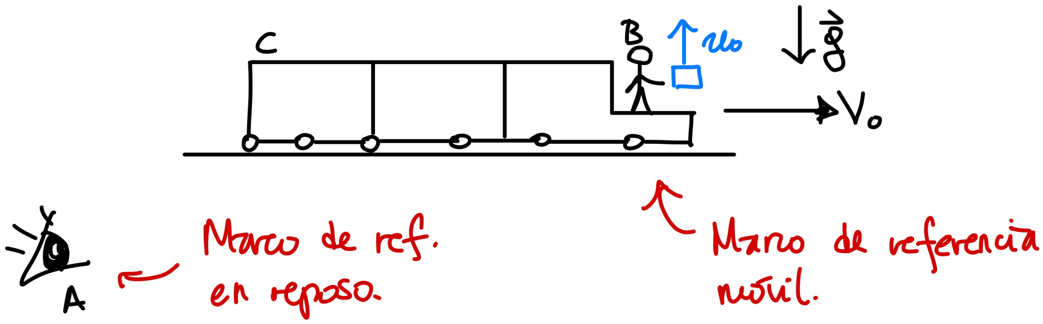
$$v' = v - V_0 \tag{5}$$

Pero v también es conocido para cada vehículo (porque es O quien mide), de modo que para ambos casos:

- **auto B**: O midió que B se mueve con rapidez u_0, reemplazando en (5): $v' = u_0 - V_0$. ¿Cómo interpretar esto? Por enunciado se tiene que $u_0 > V_0 \implies u_0 - V_0 > 0 \implies v' > 0$, luego $\vec{v}' = v'\hat{\imath}$ y el vector de velocidad apunta en el mismo sentido hacia donde se mueve A, de modo que para A el auto B se está alejando (esto pues B se mueve más rápido).
- **auto C**: Análogamente, $v' = \omega_0 - V_0$, como $\omega_0 < V_0 \implies v' = \omega_0 - V_0 < 0 \implies v' < 0$. Podemos escribir esto como $\vec{v}' = -v'\hat{\imath}$, y el vector de velocidad apunta en el sentido contrario hacia donde se mueve A, de modo que para A el auto C se está acercando (esto pues C se mueve más lento que A).

P2. Solución:

Para este problema debemos ponernos en diversas situaciones de acuerdo a quien está midiendo/observando, por lo que iremos por partes. Sin embargo, el sistema se ve como:



Llamaremos S_A al marco de referencia del observador al costado del tren, S_B al del maquinista sobre el tren y S_C al del tren.

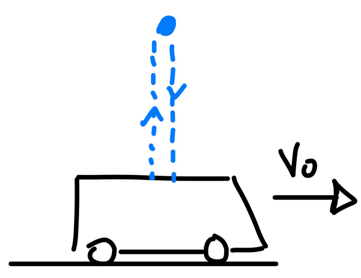
(a) Se nos menciona que es el maquinista quien mide, de modo que el observador está sobre el marco de referencia en movimiento, por lo que también se mueve con velocidad $V_0\hat{\imath}$.
Como ambos marcos de referencia se mueven a velocidad constante $V_0\hat{\imath}$, para S_B el marco de referencia NO cambia, está fijo, de modo que, al lanzar la maleta:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}' \tag{6}$$

Donde $\vec{v}$ es la velocidad con que la maleta es lanzada según B, $\vec{v}$ es la velocidad con que la maleta es lanzada según C, y $\vec{v}_{CB}$ la velocidad con que se mueve el tren respecto del maquinista. Como el maquinista está sobre el tren, entonces $\vec{v}_{CB} = 0$, y la ecuación (6) se transforma en:

$$\vec{v} = \vec{v}' = u_0\hat{\jmath} \tag{7}$$

De modo que la velocidad con que es lanzada la maleta según el maquinista tiene solo componente vertical. Si además consideramos que $\vec{g} = g\hat{\jmath}$ está siempre presente, entonces de acuerdo al maquinista, la trayectoria que sigue la maleta es la de un lanzamiento vertical:



(b) El marco de referencia S_C se mueve con velocidad $V_0\hat{\imath}$ de acuerdo a S_A. Además, la maleta es lanzada con velocidad $u_0\hat{\jmath}$. De este modo, para la maleta:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CA} + \vec{v}' \tag{8}$$
$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \tag{9}$$

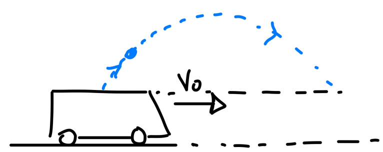
Nos interesa $\vec{v}, \vec{r}$ (velocidad y posición de la maleta según A). Sabemos que $\vec{v}_{CA} = V_0\hat{\imath}$. Por otro lado, $\vec{v}'$ es la velocidad de la maleta según S_C, que observa este lanzamiento como uno vertical, porl oque, ocupando cinemática: $\vec{v}' = \vec{V}_{i,S_C} + \vec{a}_{S_C}t = u_0\hat{\jmath} - gt\hat{\jmath} = (u_0 - gt)\hat{\jmath}$. Reemplazando ambas cosas en (8):

$$\vec{v} = V_0\hat{\imath} + (u_0 - gt)\hat{\jmath} \tag{10}$$

O escrito por componentes tenemos:

$$V_x = V_0 \tag{11}$$
$$V_y = u_0 - gt \tag{12}$$

Lo que corresponde a un movimiento con velocidad constante en el eje x y un movimiento con aceleración constante (e igual a g) en y, lo que corresponde a un **lanzamiento tipo proyectil**, por lo que su trayectoria será parabólica:



¿Cómo encontrar el desplazamiento según S_A? Recordemos que el desplazamiento corresponde a la diferencia de la posición entre dos instantes de tiempo. Además, tenemos que

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \tag{13}$$

Si la maleta es lanzada en el instante de tiempo $t = t_1$ y cae al suelo en $t = t_2$, y definimos $\Delta t_{vuelo} = t_2 - t_1$ el tiempo de vuelo, entonces el desplazamiento de la maleta viene dado, según S_A, por:

$$\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{R}(t_2) - \vec{R}(t_1) + \vec{r}'(t_2) - \vec{r}'(t_1) \tag{14}$$

De acuerdo a S_C, la trayectoria de la maleta es la de un lanzamiento vertical, entonces el desplazamiento asociado al marco de referencia del tren (o el maquinista) es nulo, es decir $\vec{r}'(t_2) - \vec{r}'(t_1) = 0$, porque su posición en el instante t_2 es igual a su posición en el instante t_1.
Por otro lado, recordemos que $\vec{R} = \vec{V}_{CA}t$. Reemplazando todo esto en (14) se tiene que:

$$\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{V}_{CA}t_2 - \vec{V}_{CA}t_1 = \vec{V}_{CA}(t_2 - t_1) = \vec{V}_{CA}\Delta t_{vuelo} \tag{15}$$

¿Cómo obtener el tiempo de vuelo? Este es el mismo para todos los observadores (y por tanto para todos los marcos de referencia), por lo que, considerando S_C, el movimiento es uno del tipo lanzamiento vertical, luego:

$$y_{f,S_c} = y_{i,S_C} + V_{i,S_C}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{16}$$

Para el trayecto total de vuelo se tiene que $y_{f,S_c} = y_{i,S_C} = 0$, $V_{i,S_C} = u_0$ (rapidez con que es lanzada la maleta según S_C y $t = \Delta t_{vuelo}$. Reemplazando esto en (16) tenemos:

$$\frac{1}{2} g (\Delta t_{vuelo})^2 = u_0 \Delta t_{vuelo} \tag{17}$$

$$\implies \Delta t_{vuelo} = \frac{2u_0}{g} \tag{18}$$

$$\implies \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{V}_{CA} \Delta t_{vuelo} = \frac{2V_0 u_0}{g} \hat{\imath} \tag{19}$$

Que es lo que se nos pide.

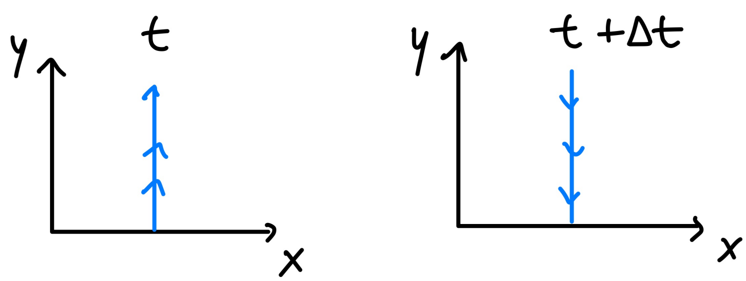
(c) Nos enfocamos en el marco de referencia S_A y procedemos de manera similar a lo hecho en (a): La velocidad con que se lanza la maleta según S_A viene dada por:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CA} + \vec{v}' \tag{20}$$

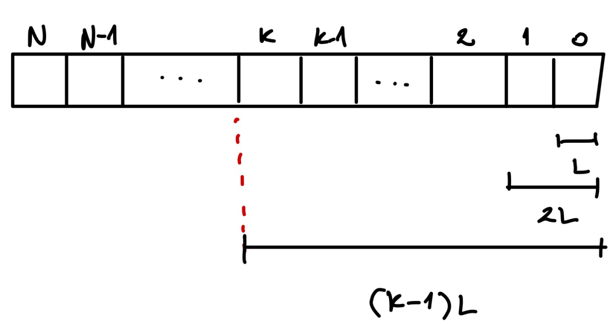
Con $\vec{v}'$ la velocidad con que es lanzada según S_C. Del enunciado, tenemos que $\vec{v}' = \vec{u} = -V_0 \hat{\imath} + N V_0 \hat{\jmath}$, y sabíamos que $\vec{v}_{CA} = V_0 \hat{\imath}$. Reemplazando en (20):

$$\vec{v} = V_0 \hat{\imath} - V_0 \hat{\imath} + N V_0 \hat{\jmath} = N V_0 \hat{\jmath} \implies \vec{v} = N V_0 \hat{\jmath} \tag{21}$$

¿Qué nos dice esto? Según S_A, la maleta es lanzada con rapidez NV_0 sólo en la componente vertical, de modo que, al igual que en (a), estamos en un lanzamiento del tipo vertical. En el plano (x, y) se vería como:



(d) Consideremos la siguiente situación:



Notemos que el largo del $k-$ésimo vagón viene dado por $d = (k-1)L$. Además, si la maleta vuela por un tiempo t_{vuelo} antes de llegar al vagón número k, y ocupando $vt = d$ entonces tenemos que:

$$V_{min}t_{vuelo} = d = (k-1)L \implies V_{min} = \frac{(k-1)L}{t_{vuelo}} \tag{22}$$

¿Cómo encontramos t_{vuelo}? Nuevamente, el tiempo de vuelo es independiente del observador. Para S_A es un movimiento de lanzamiento vertical, luego:

$$y_{f,S_A} = y_{i,S_A} + V_{i,S_A}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{23}$$

$$\implies 0 = 0 + NV_{min}t_{vuelo} - \frac{1}{2}g(t_{vuelo})^2 \tag{24}$$

$$\implies t_{vuelo} = \frac{2NV_{min}}{g} \tag{25}$$

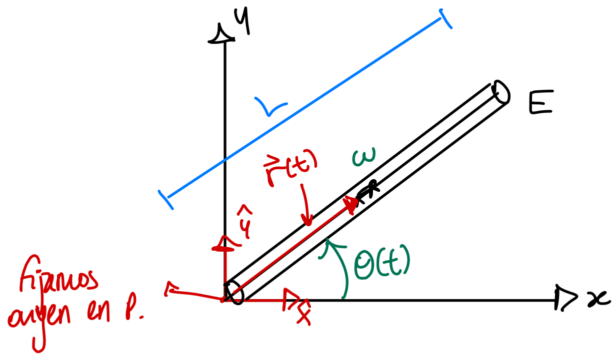
Reemplazando este ultimo resultado en (22), se tiene que:

$$V_{min} = \frac{(k-1)L}{t_{vuelo}} = \frac{(k-1)Lg}{2NV_{min}} \implies V_{min}^2 = \frac{(k-1)Lg}{2N} \implies V_{min} = \sqrt{\frac{(k-1)Lg}{2N}} \tag{26}$$

P3 Intuición física del problema:

→ El tubo se mueve en el plano describiendo un MCU. La hormiga, se mueve dentro del tubo, y cuando llega al extremo de este sale tangencial a la circunferencia que describe el tubo.

Para un instante de tiempo antes de que salga del tubo se tendría algo así:



L: largo del tubo.
$\vec{r}$: vector pos. de la hormiga respecto del tubo.
$\theta(t)$: ángulo barrido en un instante t.

Si la hormiga llega al extremo y es lanzada del tubo en un tiempo t_s (desconocido), entonces nos interesan dos intervalos de tiempo:

1° $t \in [0, t_s]$ ← desde el tiempo inicial hasta que es lanzada.

En este caso, tenemos que: → Tubo se mueve con MCU y rapidez angular ω conocida.
→ La hormiga recorre una distancia L (desconocida) en t_s, a una rapidez V_0 (conocida) cte c/r al tubo.

2° $t \geq t_s$ ← Cuando la hormiga es lanzada a la superficie.

Tenemos que: → es eyectada en el extremo del tubo, a una velocidad $\vec{V}_s$ desconocida

Observaciones:

- Se habla de rapidez y posición c/r al tubo, de modo que el problema es uno de mov. relativo.

- El primer intervalo de tiempo $[0, t_s]$ es descrito por el tubo, cuyo marco de referencia llamaremos S_E.

- El segundo intervalo de tiempo $t \geq t_s$ es descrito por la superficie, cuyo marco de referencia llamaremos S_S.

- La expresión para la posición debe coincidir para ambos intervalos de tiempo.

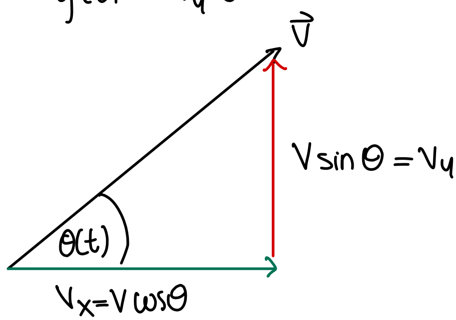
→ Para $t \in [0, t_s]$: Como la hormiga se mueve con velocidad cte:

por elección de eje coordenado.

$$\vec{r}(t) = \cancelto{0}{\vec{r}_i} + \vec{v}\, t$$

Por componentes: → $x(t) = V_x t$
$y(t) = V_y t.$

Notemos que:



$$\left.\begin{aligned} \to\ x(t) &= V\cos\theta \cdot t \\ y(t) &= V\sin\theta \cdot t. \end{aligned}\right\} (*)$$

De MCU, teníamos que: $\theta = \underset{\text{0; por sist. de ref.}}{\theta_0} + \underset{\text{conocida}}{\omega} t = \omega t.$, Además, como este intervalo de t es descrito por el tubo → $V = V_0$. Reemplazando en $(*)$

(☆)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= V_0\cos(\omega t)\cdot t \\ y(t) &= V_0\sin(\omega t)\cdot t \end{aligned}}$$ ← posición de hormiga para el intervalo $[0, t_s]$.

→ Para $t \geq t_s$: En este caso tendremos:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,\Delta t$$

Como la descripción de la posición en este intervalo de t comienza en t_s, t_s es el tiempo inicial (cuando la hormiga es lanzada), así:

→ $\Delta t = t - t_s$

→ $\vec{r}_0 = \vec{r}_s$ ← vector posición en que es lanzada hormiga en extremo del tubo en el instante t_s.
↑ desconocida.

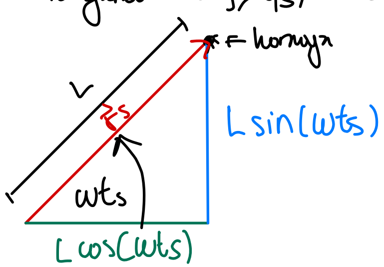
→ $\vec{v} = \vec{v}_s$ ← velocidad con que es lanzada la hormiga. Notar que esta velocidad es cte e igual a la velocidad tangencial de la hormiga cuando es lanzada (en t_s), pero según el marco de ref S_s, ya que es él quien describe el movimiento en este intervalo de tiempo.
↑ desconocida

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_s + \vec{v}_s(t - t_s).$$

Por componentes:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_s + V_{x,s}(t - t_s) \\ y(t) &= y_s + V_{y,s}(t - t_s) \end{aligned}$$

Obtengamos (x_s, y_s): Cuando es lanzada la hormiga, tenemos algo así:



$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_s &= L\cos(\omega t_s) \\ y_s &= L\sin(\omega t_s) \end{aligned}\right\} (**)$$

Nos falta conocer t_s. Como la posición en ambos intervalos de t debe coincidir para t_s, ocupamos $(\star)$ y evaluamos en t_s:

$$x(t_s) = V_0 \cos(\omega t_s) \cdot t_s$$
$$y(t_s) = V_0 \sin(\omega t_s) \cdot t_s$$

Pero $(x(t_s), y(t_s)) = (x_s, y_s)$; de modo que, igualando $(**)$ con $(\star)$:

$$L\cos(\omega t_s) = V_0 \cos(\omega t_s) \cdot t_s$$
$$L\sin(\omega t_s) = V_0 \sin(\omega t_s) \cdot t_s$$

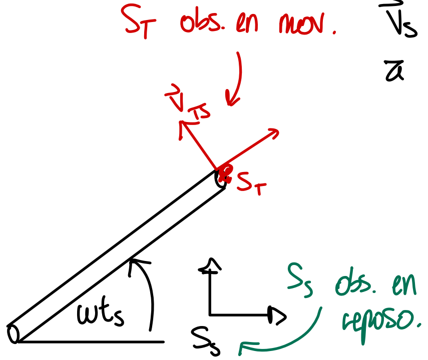
Despejando t_s de cualquiera de las dos ecuaciones:

$$\boxed{t_s = \frac{L}{V_0}}$$

Reemplazando en $(**)$:

$$\boxed{\begin{aligned} x_s &= L\cos\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) \\ y_s &= L\sin\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) \end{aligned}}$$

Nos falta determinar $\vec{V}_s$. Recordando mov. relativo, tendremos, en t_s:



$\vec{V}_s$ es la velocidad de la hormiga c/r a la superficie, y:

$$\vec{V}_s = \underbrace{\vec{V}_{TS}}_{\text{velocidad del tubo c/r a la superficie}} + \underbrace{\vec{V}'}_{\text{velocidad de la hormiga c/r al tubo}}$$

Para determinar $\vec{V}_{TS}$, notemos que según la superficie, el tubo se mueve con MCU, cuya rapidez (tangencial) es:

$$V_{TS} = \omega L$$

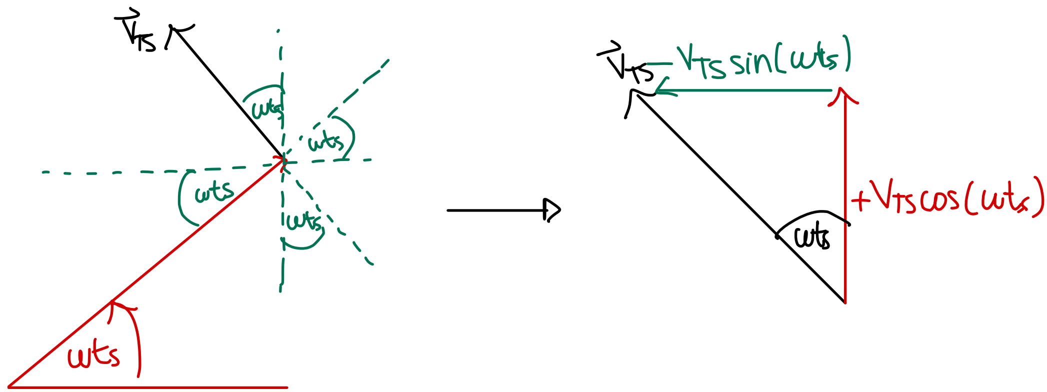
Por otro lado, $\vec{V}'$ es conocida por enunciado, tenemos:

$$|\vec{V}'| = V_0 .$$

Escribiendo $\vec{V}_S$ por componente:

$$\left.\begin{aligned} V_{xS} &= V_{xTS} + V'_x \\ V_{yS} &= V_{yTS} + V'_y \end{aligned}\right\} (\bullet)$$

Notando que:



$\Rightarrow$ $(\bullet)$ es en verdad:

$$\begin{aligned} V_{xS} &= -V_{TS}\sin(\omega t_s) + V'_x \Rightarrow \\ V_{yS} &= V_{TS}\cos(\omega t_s) + V'_y \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_{xS} &= -\omega L \sin\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) + V_0 \cos\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) \\ V_{yS} &= \omega L \cos\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) + V_0 \sin\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) \end{aligned}}$$

Así, la posición de la hormiga para $t \geq t_s$:

$$x(t) = x_s + V_{x,s}(t - t_s)$$
$$y(t) = y_s + V_{y,s}(t - t_s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= L\cos\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) + \left[V_0\cos\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) - \omega L\sin\left(\frac{\omega L}{V_0}\right)\right](t - t_s) \\ y(t) &= L\sin\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) + \left[V_0\sin\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) + \omega L\cos\left(\frac{\omega L}{V_0}\right)\right](t - t_s) \end{aligned}}$$

De esta manera, la posición de la hormiga viene dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} V_0\cos(\omega t) & ; \quad t \in [0, t_s] \\ L\cos\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) + \left[V_0\cos\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) - \omega L\sin\left(\frac{\omega L}{V_0}\right)\right](t - t_s) & ; \quad t \geq t_s \end{cases} \\ y(t) &= \begin{cases} V_0\sin(\omega t) & ; \quad t \in [0, t_s] \\ L\sin\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) + \left[V_0\sin\left(\frac{\omega L}{V_0}\right) + \omega L\cos\left(\frac{\omega L}{V_0}\right)\right](t - t_s) & ; \quad t \geq t_s \end{cases} \end{aligned}}$$