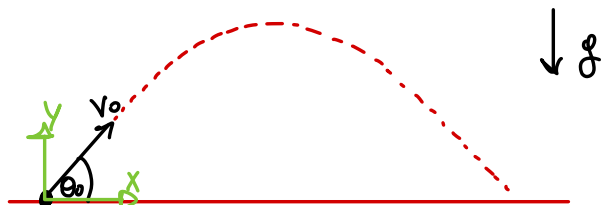


Pauta auxiliar 3

P1 Este problema nos ayudará (idealmente) a entender un poco más el mov. parabólico de una partícula (problemas tipo lanzamiento de proyectil).

Primero resolveremos el problema y luego le daremos una interpretación física al resultado.

1.- Intuición física y 2.- sist. de referencia:

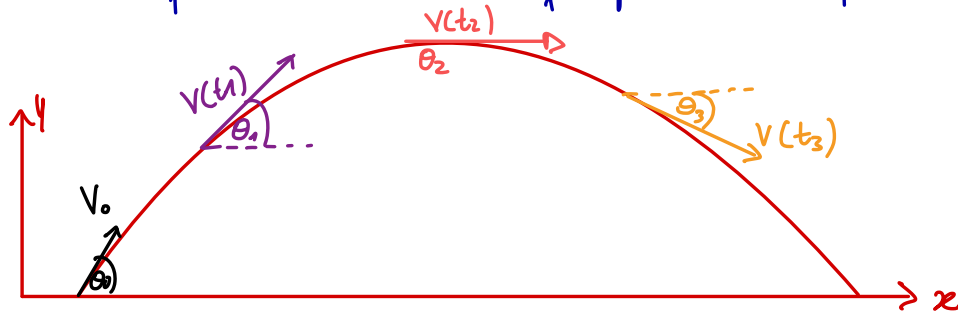


donde el punto $(x_i, y_i) = (0, 0)$

➤ La partícula es lanzada con velocidad inicial $V_0 > 0$ conocida y ángulo de inclinación con respecto a la horizontal θ_0 conocido también.

➤ La acción de g está presente, por lo que la partícula tiene aceleración constante.

➤ La partícula sigue la trayectoria del dibujo, por lo que si nos imaginamos lo que ocurre a medida que pasa el tiempo:



θ_1, θ_2 y θ_3 son los ángulos de inclinación que toma la velocidad de la partícula en distintos instantes de tiempo. Claramente estos son di-

ferentes entre sí, por lo que es razonable pensar que tanto la velocidad de la partícula como el ángulo de inclinación asociado a esta, θ , dependen del tiempo. (Ambas elusmonocotas)

Si fijamos el sist. de referencias desde donde es lanzada la partícula (ver dibujo 1), entonces tendremos:

- > Posición inicial $(X_i, Y_i) = (0, 0)$, la partícula es lanzada desde el origen de nuestro sistema coordenado.
- > La rapidez inicial con que es lanzada es V_0 [m/s] uyo ángulo de inclinación es θ_0 [rad].
- > g está siempre presente.
- > No conocemos su velocidad ni ángulo de inclinación en función del tiempo ($V(t)$ y $\theta(t)$).

3.- Plantear ecuaciones:

Queremos conocer $\theta(t)$: ¿Qué cantidad física está relacionada con el ángulo de la velocidad? **Spoiler: la velocidad!** Estamos en un movimiento con aceleración constante, por lo que nos conviene usar:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_i + \vec{a} \Delta t \quad (1)$$

• Ojo! recordemos que estamos en 2D ahora, por lo que es correcto escribir la velocidad como un vector. (tiene componentes (x, y)).

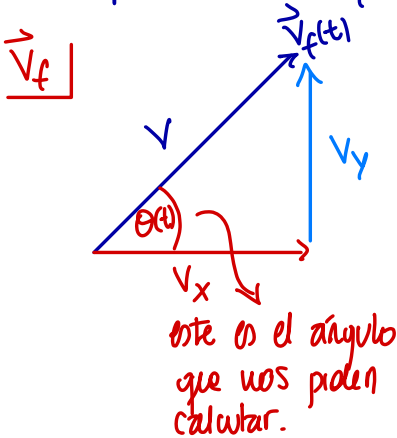
En nuestro caso, $\vec{a} = -g\hat{j}$; ¿por qué? por como elegimos el sist. de referencias, pero lo veremos luego.

4: Imponer condiciones y 5: resolver incógnitas:

Al ver la ecuación $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\Delta t$, notamos que tenemos solo 1 ecuación y al menos 2 incógnitas ($v(t) = v_f$ y $\theta(t)$).

¿De dónde sacamos más? $\rightarrow$ Estamos en un mov. 2D! por lo que podemos descomponer la velocidad en sus componentes x e y para obtener más ecuaciones!:

Descomponemos: $\vec{v}_f(t) = \vec{v}_i + \vec{a}\Delta t$

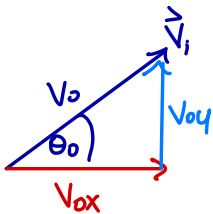


Si V es la rapidez (magnitud de $\vec{v}_f(t)$) y θ el ángulo de inclinación de la velocidad (que varía en el tiempo según nuestra interacción), usando las relaciones trigonométricas tenemos:

$$\vec{v}_f(t) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

$$\rightarrow \vec{v}_f(t) = \underbrace{V \cos \theta}_{\text{componentes}} \hat{i} + \underbrace{V \sin \theta}_{\text{componentes}} \hat{j} \quad (2)$$

$\vec{v}_i$ Al igual que para $\vec{v}_f$; tenemos:



Luego:

$$\vec{v}_i = v_{ox} \hat{i} + v_{oy} \hat{j}$$

Pero la rapidez inicial es v_0 (¿qué significa esto?) que la magnitud de $\vec{v}_i$ es v_0 .

$$\rightarrow \vec{v}_i = v_i \cos \theta_0 \hat{i} + v_i \sin \theta_0 \hat{j} \Rightarrow \vec{v}_i = \underbrace{v_0 \cos \theta_0}_{\text{componentes}} \hat{i} + \underbrace{v_0 \sin \theta_0}_{\text{componentes}} \hat{j} \quad (3)$$

$\vec{a}$ la aceleración (constante) en este caso es $\vec{g}$. según nuestro sistema de referencia escogido,

$$\int \vec{g} : \boxed{\vec{a} = -g \hat{j}} \quad (4)$$

Reemplazando (2), (3), (4) en (1):

$$V \cos \theta \hat{i} + V \sin \theta \hat{j} = V_0 \cos \theta_0 \hat{i} + V_0 \sin \theta_0 \hat{j} - g \hat{j} \Delta t$$

Escribiendo por componentes $\hat{i}$ y $\hat{j}$:

$$\begin{array}{l} \hat{i} \\ \hat{j} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} V \cos \theta = V_0 \cos \theta_0 \\ V \sin \theta = V_0 \sin \theta_0 - g \Delta t \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (i) \\ (ii) \end{array}$$

¿Que nos dicen las ecuaciones? Que en este caso el mov. de la partícula puede ser descompuesto en un mov. con rapidez constante en $\hat{i}$ y uno con aceleración constante en $\hat{j}$, esto, por como imaginamos nuestro sistema de referencias.

Tenemos entonces 2 ecuaciones (i y ii) y 2 incógnitas (V, θ). Podemos resolver.

6- Resolver: Como no nos preguntan por V , podemos resolver de dividiendo (ii) por (i)

$$\rightarrow \frac{\cancel{V} \sin \theta}{\cancel{V} \cos \theta} = \frac{V_0 \sin \theta_0 - g \Delta t}{V_0 \cos \theta_0}$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = \frac{V_0 \sin \theta_0 - g \Delta t}{V_0 \cos \theta_0}$$

Separando el numerador:

$$\tan \theta = \frac{\cancel{V_0 \sin \theta_0}}{\cancel{V_0 \cos \theta_0} \tan \theta_0} - \frac{g \Delta t}{V_0 \cos \theta_0}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan \theta_0 - \frac{g \Delta t}{V_0 \cos \theta_0}$$

En principio este resultado ya es correcto, sin embargo, si queremos una expresión explícita, tomamos $\tan^{-1}(\cdot) = \arctan(\cdot)$ en ambos lados :

$$\arctan(\tan \theta) = \arctan \left(\tan \theta_0 - \frac{g \Delta t}{V_0 \cos \theta_0} \right)$$

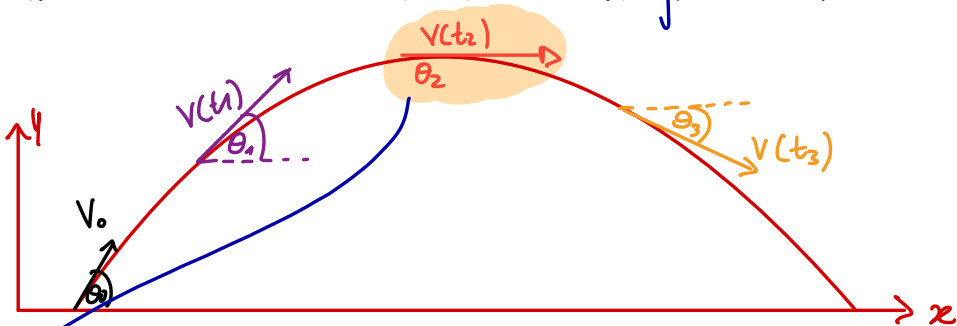
$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \arctan \left(\tan \theta_0 - \frac{g \Delta t}{V_0 \cos \theta_0} \right)}$$

Que es el resultado que se nos pide (θ depende de t).

¿Qué cosas podemos aprender de esta fórmula?

• Si $\Delta t = 0$ (cond. inicial) $\rightarrow \theta(t=0) = \arctan(\tan \theta_0) = \theta_0$
Recuperamos ángulo inicial!

• Visualmente: ¿Qué ocurre cuando $\theta(t)$ es igual a 0?



El ángulo debe ser igual a cero. ¿Qué significa esto?

•> Si tenemos en la altura máxima:

$$\longrightarrow \vec{v}(t)$$

$\Rightarrow \theta(t) = 0 \Rightarrow$ la rapidez en $\hat{j}$ es nula! pues:

$$\vec{v}(t) = v \cos(0) \hat{i} + v \sin(0) \hat{j}$$

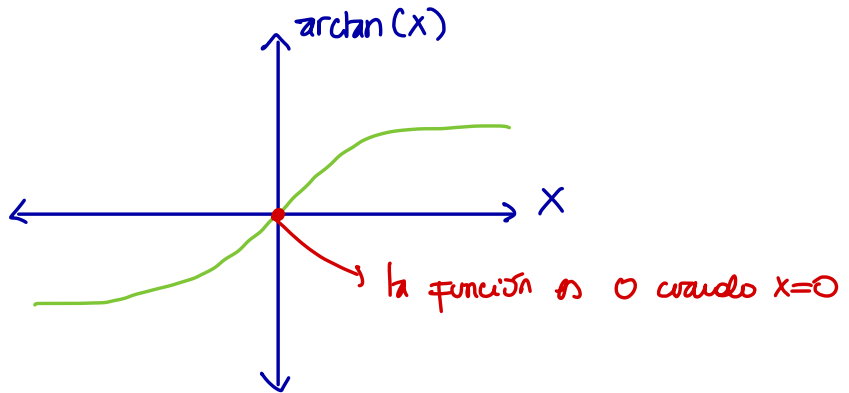
$\rightarrow \vec{v}(t) = v \hat{i}$

Toda la magnitud de v está incluida en su componente $\hat{i}$.

- > Es decir, cuando $\theta(t) = 0$:
- > $v_y = 0$ (Nula)
 - > $v_x = v$ (Máxima posible).
 - > La altura es máxima.

•> Más aún, podríamos saber en qué momento se alcanza la altura máxima:

Veamos un gráfico de lo que ocurre con $\arctan(x)$.



En nuestro caso: Si $\theta(t) = 0$ Entonces se cumple que

$$\tan \theta_0 - \frac{g t}{v_0 \cos \theta_0} = 0 \Rightarrow g t = \frac{v_0 \cos \theta_0 \sin \theta_0}{\cos \theta_0} = v_0 \sin \theta_0$$

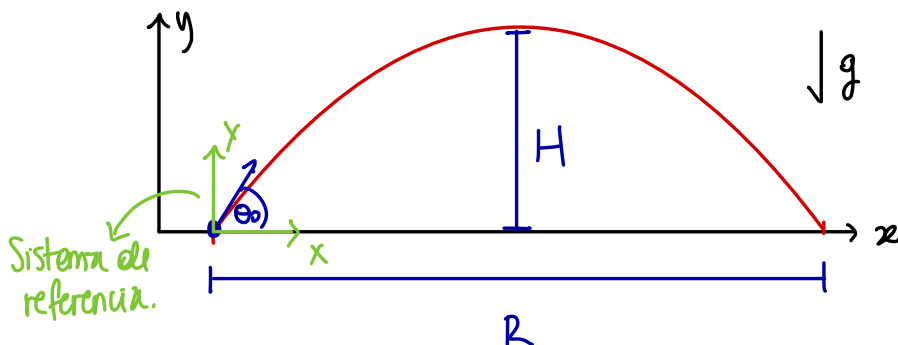
Luego

$$T = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

→ tiempo en que se demora en llegar al punto más alto.

P2 Nos encontramos en la misma situación física que antes:

1.- Intuición física y 2-sistema de referencia:



- El proyectil es lanzado desde el origen $(x_i, y_i) = (0, 0)$ (conocido) con una velocidad inicial $\vec{v}_i$ (desconocida) y un ángulo de inclinación inicial θ_0 (conocido).
- g está siempre presente.
- El proyectil recorre una distancia horizontal R [m] (desconocida) pasando por una altura máxima H [m] (desconocida) en T [s] (desconocido).

Tenemos entonces:

- $(x_i, y_i) = (0, 0)$
- Se lanza el proyectil con vel inicial v_i y ángulo θ_0
- g siempre presente → mov. con aceleración constante.
- Se recorre R en T . (horizontal) conocido
- Se alcanza una altura máxima H . desconocido

3.- Plantear ecuaciones:

Queremos encontrar una expresión que relacione posiciones que tiene una partícula que se mueve con aceleración constante.
¿Qué ecuación nos sirve? $\rightarrow$ Itinerario! ¿Habrá que necesitar más que solo ésta? Spoiler: Sí, pero lo veremos en el camino.

$\rightarrow$ Ouparemos:

$$\vec{r}_f(t) = \vec{r}_i \pm \vec{v}_i \Delta t \pm \frac{\vec{a} \Delta t^2}{2}$$

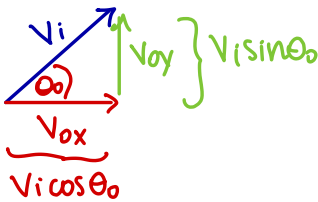
► Ojo: Nuevamente, estamos en un mov. 2D, por lo que eventualmente hay que descomponer el movimiento por componentes.

4.- Imponer condiciones y 5.- reconocer incógnitas. Tenemos:

$$\vec{r}_f(t) = \vec{v}_i \Delta t + \frac{\vec{a} \Delta t^2}{2} \quad (1)$$

De igual manera que en P1. Descomponemos por componente:

$\vec{r}_f$ $\boxed{\vec{r}_f = x_f \hat{i} + y_f \hat{j}}$ $\leftarrow$ Simplemente las componentes x e y.

$\vec{v}_i$  $\Rightarrow \vec{v}_i = v_{ox} \hat{i} + v_{oy} \hat{j}$
 $\Rightarrow \vec{v}_i = v_i \cos \theta_0 \hat{i} + v_i \sin \theta_0 \hat{j}$
desconociado. *ángulo inicial conocido*

$\vec{a}$ $\int \vec{g}$: $\boxed{\vec{a} = -g \hat{j}}$

Reemplazando en (1):

$$x_f \hat{i} + y_f \hat{j} = (v_i \cos \theta_0 \hat{i} + v_i \sin \theta_0 \hat{j}) \Delta t - g \hat{j} \frac{\Delta t^2}{2}$$

Desarrollando:

$$X_f \hat{i} + Y_f \hat{j} = V_i \cos \theta_0 \Delta t \hat{i} + V_i \sin \theta_0 \Delta t \hat{j} - \frac{g(\Delta t)^2}{2} \hat{j}$$

Separando en ecuaciones por componentes $\hat{i}, \hat{j}$.

$$\hat{i} \quad X_f = V_i \cos \theta_0 \Delta t$$

$$\hat{j} \quad Y_f = V_i \sin \theta_0 \Delta t - \frac{g}{2} (\Delta t)^2$$

Notar que el movimiento en $\hat{i}$ es de velocidad constante, y el mov. en $\hat{j}$ es de aceleración constante.

Ahora imponemos condiciones:

→ R en T: Al ser la distancia horizontal, se impone en la ecuación para $\hat{i}$:

$$R = V_i \cos \theta_0 T \quad 1 \text{ ec. y } 3 \text{ incógnitas.}$$

→ Notemos que: la altura máxima se encuentra en el punto medio del trayecto en $\hat{i}$ (se da que $y=H$ cuando $x=R/2$). Como el mov. en $\hat{i}$ es con velocidad constante, entonces si se recorre R en T $\Rightarrow$ se recorre R/2 en T/2. Luego, tenemos que:

En T/2 [s] se alcanza la altura máxima. ¿Dónde imponemos otro y por qué? en la ec. para $\hat{j}$!

$$H = V_i \sin \theta_0 \left(\frac{T}{2} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{T}{2} \right)^2$$

$$\rightarrow H = \frac{1}{2} V_i \sin \theta_0 T - \frac{1}{8} g T^2 \quad 2 \text{ ecs. } 4 \text{ incógnitas.}$$

¿De dónde sacar más ecuaciones que estén relacionadas con los condiciones que conocemos del problema?

→ Recordemos que es un mov. de aceleración constante. Tenemos También:

$$\vec{V}_f(t) = \vec{V}_i + \vec{a} \Delta t.$$

Por componentes :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} \quad V_x = V_i \cos \theta_0 \\ \hat{y} \quad V_y = V_i \sin \theta_0 - g \Delta t \end{array} \right\} \text{ esto es lo mismo que en la P1! } \nabla.$$

Recordemos que cuando se alcanza la altura máxima H en $\frac{T}{2}$, la rapidez en V_y es nula! (porque el ángulo de inclinación se vuelve 0 según la P1!)

Imponiendo esto en la ecuación de la rapidez para $\hat{y}$:

ojo: esta ec. es la que obtenimos para el tiempo en que llega a la altura máx en P1, con $t = \frac{T}{2}$!

$$0 = V_i \sin \theta_0 - \frac{gT}{2}$$

3 ecs y 4 incógnitas.

¿Nos falta 1 ecuación? **NO**, el problema nos pide obtener $\frac{H}{R}$ y no H y R por separado, por lo que la incógnita es en realidad H/R y NO H, R (1 en vez de 2). Luego Tenemos 3 ecs. y 3 incógnitas.

→ las ecuaciones son:

$$R = V_i \cos \theta_0 T$$

(1)

$$H = V_i \sin \theta_0 \frac{T}{2} - \frac{1}{2} g T^2$$

(2)

$$0 = V_i \sin \theta_0 - \frac{gT}{2}$$

(3)

6.- Resolver:

Dividimos $(2) \div (1)$:

$$\frac{H}{R} = \frac{V_i \sin \theta_0 (T/2) - (1/8) g T^2}{V_i \cos \theta_0 T}$$

Separando el numerador:

$$\frac{H}{R} = \frac{\cancel{V_i} \sin \theta_0 (T/2) - \frac{1}{8} \frac{g T^2}{\cancel{V_i \cos \theta_0 T}}}{\cancel{V_i \cos \theta_0 T}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{H}{R} = \frac{1}{2} \tan \theta_0 - \frac{1}{8} \frac{g T}{V_i \cos \theta_0}} \quad *$$

El resultado nos queda en función de V_i, T , desconocidos. de (3), despejamos T :

$$\frac{g T}{2} = V_i \sin \theta_0$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2 V_i \sin \theta_0}{g}}$$

Reemplazando en (*):

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{2} \tan \theta_0 - \frac{1}{8} \frac{\cancel{g}}{\cancel{V_i \cos \theta_0}} \cdot \frac{2 \cancel{V_i} \sin \theta_0}{\cancel{g}}$$

$$= \frac{1}{2} \tan \theta_0 - \frac{1}{4} \frac{\cancel{\sin \theta_0}}{\cancel{\cos \theta_0}} \overset{\tan \theta_0}{=} = \frac{1}{2} \tan \theta_0 - \frac{1}{4} \tan \theta_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{H}{R} = \frac{1}{4} \tan \theta_0} \quad \text{Que es el resultado pedido !}$$

¿Qué ángulo hay que ocupar si queremos que lo recorrido en y sea igual a lo recorrido en x ?

Si se recorre lo mismo en x e $y \Rightarrow H=R$. Luego:

$H=R \Rightarrow \frac{H}{R} = 1$. Reemplazando en el resultado:

$$1 = \frac{1}{4} \tan \theta_0 \Rightarrow \tan \theta_0 = 4 \quad / \quad \arctan(\cdot)$$

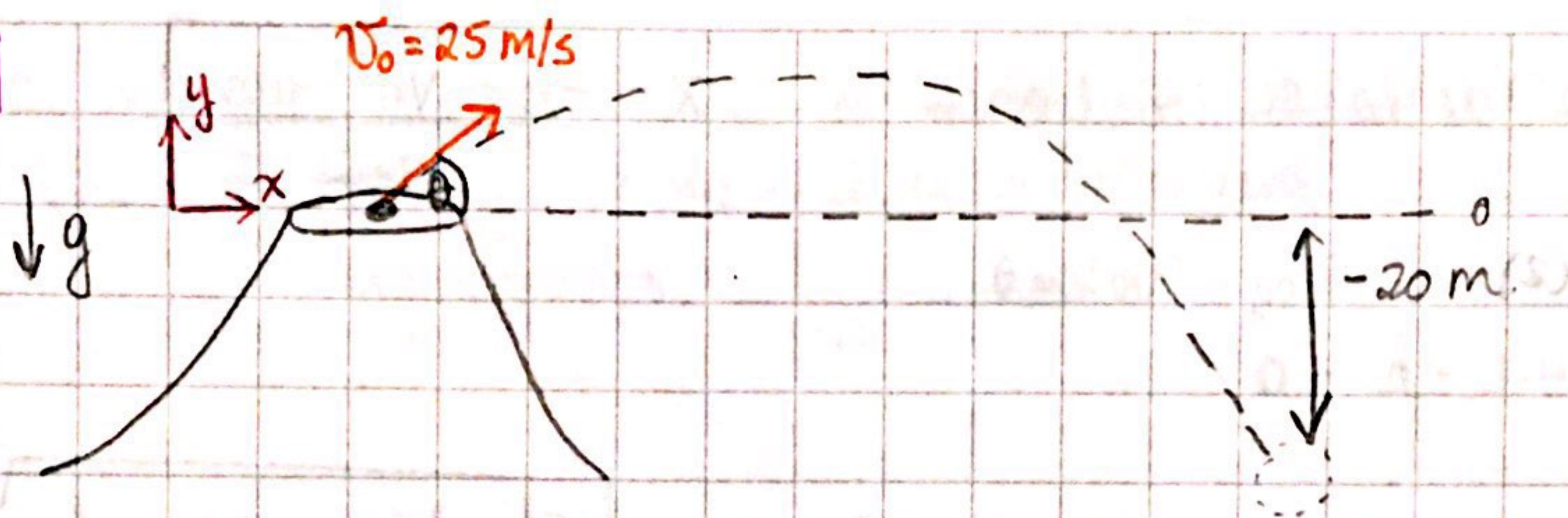
$$\Rightarrow \boxed{\theta_0 = \arctan(4)}.$$

En la calculadora: $\theta_0 \approx 1,326 \text{ [rad]}$

$$= 75,96^\circ$$

$\rightarrow$ Hay que lanzarla más alto que largo!

P3]



① Datos del problema

$$v_0 = 25 \text{ m/s} \quad t = ?$$

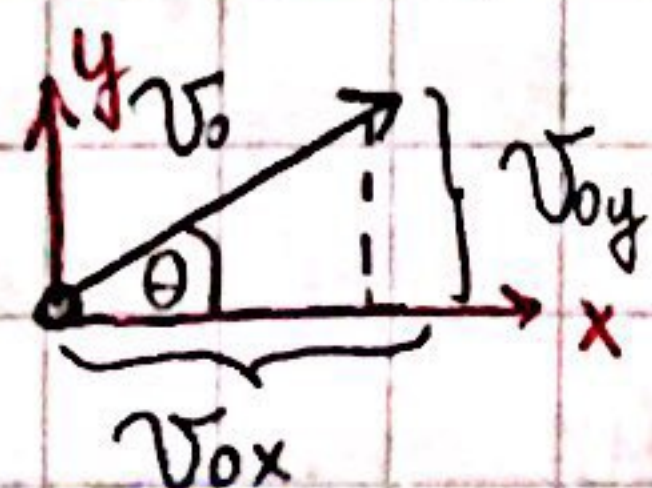
$$h = 20 \text{ m} \quad |\vec{v}_f| = ?$$

$$\theta = 35^\circ$$

② Planteamos ecs:

Separamos el problema por componentes x e y .

Al inicio del movimiento:



$$\cos \theta = \frac{v_{0x}}{v_0}$$

$$\sin \theta = \frac{v_{0y}}{v_0}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

X No hay aceleración $\Rightarrow v_x$ es cte
 $v_{fx} = v_{0x} \Rightarrow v_{fx} = v_0 \cos \theta$ (1)

y Tenemos la acel. de gravedad: $a_y = -g$
 Por el sist. de referencia: $y_i = 0$
 $y_f = -h$

$$\Rightarrow -h = 0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

↳ tiempo total de vuelo.

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + h = 0$ (2) $\rightarrow$ Es de la forma de ec. cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$
 donde t es nuestra incógnita.

Recordar Mov. 2D $\rightarrow$ 2 movimientos independientes en x e y .
 En ejercicios de lanzamiento de proyectil:

X El mov. de la partícula es bajo vel. cte ($a_x = 0$)

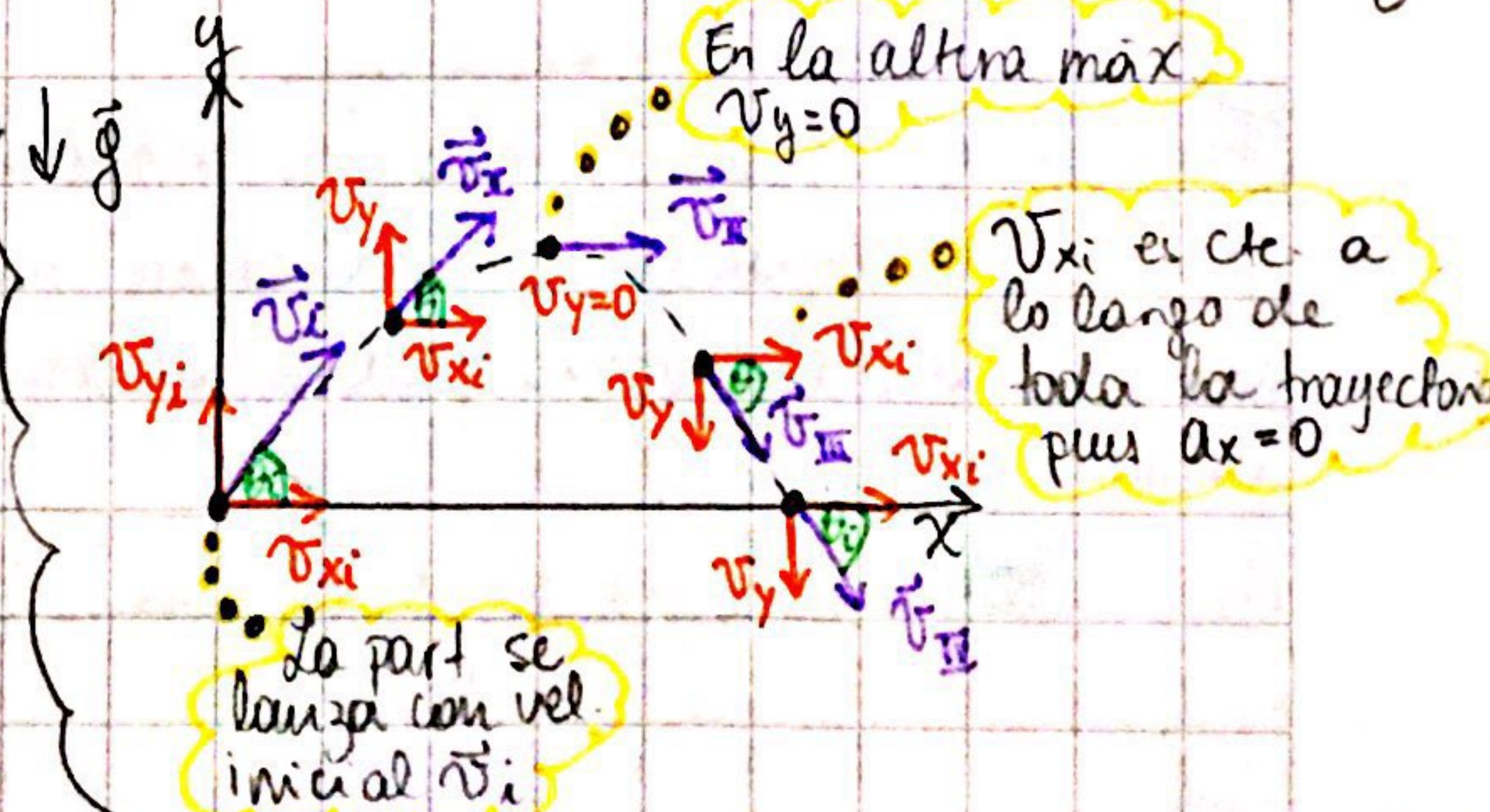
$$\Rightarrow x_f = x_i + v_{ix} \cdot t \quad v_{fx} = v_{ix}$$

y El mov. de la partícula es bajo aceleración cte: ($a_y = -g$)

$$\Rightarrow v_{fy} = v_{iy} - g t \quad y_f = y_i + v_{iy} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

Las componentes en x e y en este tipo de ejercicios son independientes, donde t es la variable común en el mov. en x e y .



Sabemos que la sol de la ec. cuadrática es $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

③ Resolvemos.

Volviendo a la ec (2): $V_{0y} = V_0 \sin \theta$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin \theta \cdot t + h = 0$$

Luego, la solución para t es: $t = \frac{-V_0 \sin \theta \pm \sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta - 4 \cdot (-\frac{1}{2}g) \cdot h}}{2 \cdot (-\frac{1}{2}g)}$

$$t = \frac{-V_0 \sin \theta \pm \sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{-g}$$

$$t = \frac{+V_0 \sin \theta \pm \sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g}$$

Sabemos que el tiempo es siempre positivo $\Rightarrow$ tomamos la solución $t > 0$

$$\therefore t = \frac{V_0 \sin \theta + \sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g}$$

$\rightarrow$ Hemos encontrado una expresión algebraica para el tiempo que tarda en impactar la roca en el suelo.

Para comprobar el resultado, realizamos el análisis dimensional

$$\begin{array}{l} V_0 \sin \theta \sim L/T \\ g \sim L/T^2 \end{array} \quad 2gh \sim L^2/T^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{L/T + \sqrt{L^2/T^2}}{L/T^2} \sim \frac{L/T}{L/T^2} = T \quad \checkmark$$

Finalmente, cuando tenemos problemas con valores numéricos, siempre debemos resolverlos algebraicamente para encontrar las incógnitas en función de las variables que conocemos y al final reemplazar los valores.

$$g \sim 10 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Así. } t = \frac{25 \cdot \sin 35^\circ + \sqrt{25^2 \sin^2 35^\circ + 2 \cdot 10 \cdot 20}}{10} = 3.90 \text{ s}$$

10

Para calcular la rapidez con que la roca impacta el suelo, usamos la definición de rapidez (magnitud de la velocidad).

$$|\vec{v}_f| = \sqrt{(v_{fx})^2 + (v_{fy})^2} \quad (3)$$

De (1), $v_{fx} = v_0 \cos \theta$ pues se mantiene constante.

¿ v_{fy} ?

Como en el eje y la aceleración es de $-g$, podemos usar que:

$$v_{fy} = v_{0y} - gt \quad (4)$$

$\Rightarrow v_{fy} = v_0 \sin \theta - gt$ / reemplazamos t encontrado en la parte anterior.

$$v_{fy} = v_0 \sin \theta - g \left(\frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g} \right) = v_0 \sin \theta - v_0 \sin \theta - \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}$$

$$v_{fy} = -\sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh} \quad / \text{ Reemplazando en (3)}$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}_f| &= \sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (-\sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh})^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh} \\ &= \sqrt{v_0^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) + 2gh} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \end{aligned}$$

$\therefore |\vec{v}_f| = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ es la rapidez con que la roca impacta el suelo.

Realizamos el análisis dimensional: $\sqrt{L^2/T^2 + L^2/T^2} = L/T \quad \checkmark$

Reemplazamos los valores numéricos: $|\vec{v}_f| = \sqrt{25^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20} = 32.01 \text{ m/s} //$