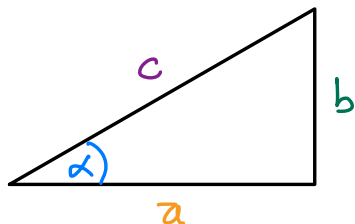


Resumen

Pequeño resumen de trigonometría:

→ Para un triángulo rectángulo de lados a, b, c :



Donde:

c = hipotenusa

a = Cateto adyacente

b = Cateto opuesto

Se cumple que:

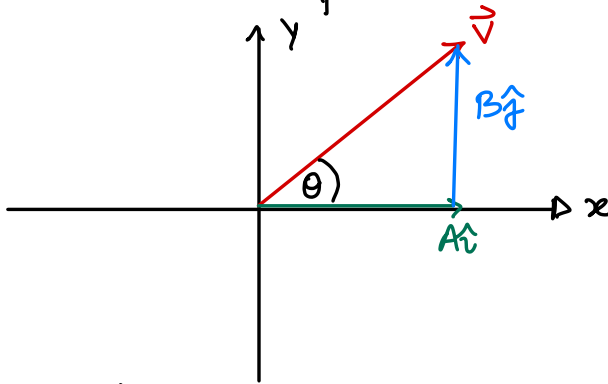
$$\begin{aligned} \rightarrow c \cos \alpha &= a & \text{o} & \cos \alpha = \frac{\text{cat. ady}}{\text{hipotenusa}} \\ \rightarrow c \sin \alpha &= b & \text{o} & \sin \alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \tan \alpha = \frac{b}{a} & \text{o} & \tan \alpha = \frac{\text{Cat. opuesto}}{\text{Cat adyacente}} \end{aligned}$$

Y algunas formulas útiles:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \rightarrow \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \rightarrow \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Pequeño resumen de vectores:

→ Si $\vec{V}$ es un vector tal que $\vec{V} = A\hat{i} + B\hat{j}$



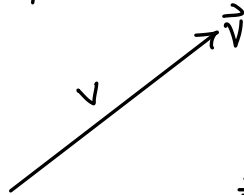
→ El módulo de $\vec{V}$ viene dado por

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{A^2 + B^2}$$

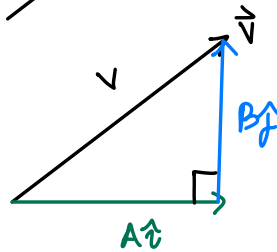
Componente $\hat{i}$ Componente $\hat{j}$

→ La descomposición de un vector por componentes se puede hacer como sigue:

1.- Escribir el vector:

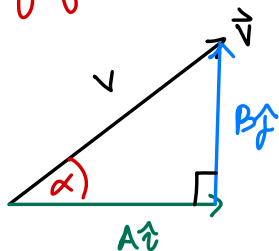


2.- Agregar componentes:



→ Notar que hemos construido un triángulo **rectángulo**, i.e., podemos usar las relaciones trigonométricas!

3- Agregar ángulo y relaciones trigonométricas:



$$\left. \begin{aligned} V \cos \alpha &= A \\ V \sin \alpha &= B \end{aligned} \right\} *$$

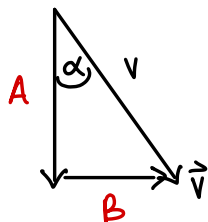
4- Escribirlo en forma vectorial: Si estamos en el plano (x,y) , la componente x del vector ($A\hat{i}$) apunta a la derecha, por lo tanto es positivo, la componente y ($B\hat{j}$) apunta hacia arriba, por lo tanto es positivo también.

$$\Rightarrow \vec{V} = A\hat{i} + B\hat{j} \Leftrightarrow V \cos \alpha \hat{i} + V \sin \alpha \hat{j}$$

Reemplazando
(*)

Obs:

- Ojo siempre con los signos y hacia a dónde apuntan las componentes de cada vector.
- Ojo también cuando los triángulos que construimos son de la forma



- En este caso las relaciones trigonométricas nos entregan que:

$$\vec{V} = B\hat{i} - A\hat{j} = V \sin \alpha \hat{i} - V \cos \alpha \hat{j}$$

P1 Del enunciado, tenemos que:

•> Datos: α, θ, ϕ, C

•> Incógnitas: A, B

→ Tenemos 2 incógnitas. Recordemos que vimos que para resolver o despejar incógnitas de un problema, necesitamos que se cumpla que:

$$\# \text{ ecuaciones} \geq \# \text{ incógnitas}$$

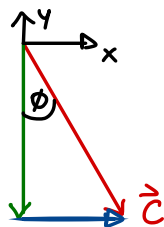
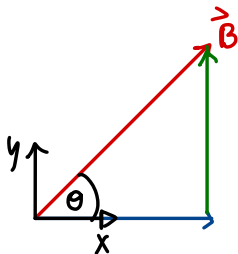
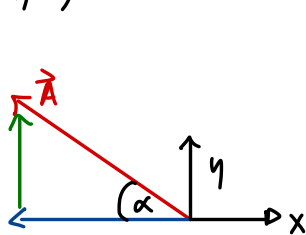
→ Necesitamos al menos 2 ecuaciones. ¿De dónde las sacamos? El enunciado nos menciona que

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0} \quad (1)$$

⇒ Si escribimos (1) por componentes (descomposición por ejes x, y) Obtendremos dos ecuaciones!

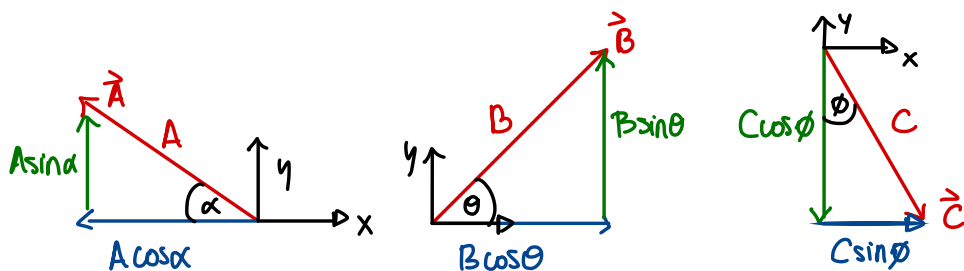
•> ¿Cómo procedemos?

1.- Construir triángulos rectángulos asociados a cada vector, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$:



Esto es, agregar las componentes e incluir el ángulo asociado.

2.- Ocupando las relaciones trigonométricas, tendremos:



3.- Podemos escribir entonces:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \ominus A \cos \alpha \hat{i} \oplus A \sin \alpha \hat{j} \\ \vec{B} &= \oplus B \cos \theta \hat{i} \oplus B \sin \theta \hat{j} \\ \vec{C} &= \oplus C \sin \phi \hat{i} \ominus C \cos \phi \hat{j}\end{aligned}$$

Annotations: For $\vec{A}$, $\ominus A \cos \alpha \hat{i}$ points left, $\oplus A \sin \alpha \hat{j}$ points up. For $\vec{B}$, both components point right/up. For $\vec{C}$, $\oplus C \sin \phi \hat{i}$ points right, $\ominus C \cos \phi \hat{j}$ points down.

4.- Reemplazando en (1):

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -A \cos \alpha \hat{i} + A \sin \alpha \hat{j} + B \cos \theta \hat{i} + B \sin \theta \hat{j} + C \sin \phi \hat{i} - C \cos \phi \hat{j} = \vec{0}$$

$\Rightarrow (0\hat{i} + 0\hat{j}) \rightarrow$ Escribimos 0 por componentes también.

Si agrupamos los $\hat{i}$, $\hat{j}$ y escribimos las ecuaciones por separado tendremos que

$$(2) \quad \hat{i} \quad -A \cos \alpha + B \cos \theta + C \sin \phi = 0$$

$$(3) \quad \hat{j} \quad A \sin \alpha + B \sin \theta - C \cos \phi = 0$$

$\rightarrow$ Tenemos 2 ecuaciones y 2 incógnitas! Podemos resolver.

$\hookrightarrow$ Ecuación (1) escrita por componentes.

→ De ec (2) despejamos A:

$$A \cos \alpha = B \cos \theta + C \sin \phi \Rightarrow A = \frac{B \cos \theta + C \sin \phi}{\cos \alpha} \quad (4)$$

→ Reemplazando el resultado en (3):

$$A \sin \alpha + B \sin \theta - C \cos \phi = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{B \cos \theta + C \sin \phi}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha + B \sin \theta - C \cos \phi = 0$$

→ Como C, θ , ϕ , α son conocidos, despejamos B:

$$\Leftrightarrow \frac{B \cos \theta \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{C \sin \phi \sin \alpha}{\cos \alpha} + B \sin \theta - C \cos \phi = 0$$

$\tan \alpha$ $\tan \alpha$

→ Agrupamos los B:

$$B \cos \theta \tan \alpha + B \sin \theta = C \cos \phi - C \sin \phi \tan \alpha$$

→ Factorizamos:

$$B (\underbrace{\cos \theta \tan \alpha + \sin \theta}_*) = C (\underbrace{\cos \phi - \sin \phi \tan \alpha}_{**})$$

* lo podemos escribir como:

$$\cos \theta \tan \alpha + \sin \theta = \cos \theta \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \sin \theta = \frac{\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin (\alpha + \theta)}{\cos \alpha}$$

$\eta (**)$ como:

$$\begin{aligned}\cos \phi - \sin \phi \tan \alpha &= \cos \phi - \sin \phi \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\cos(\alpha + \phi)}{\cos \alpha}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow B(\cos \theta \tan \alpha + \sin \theta) = C(\cos \phi - \sin \phi \tan \alpha)$$

$$\Leftrightarrow B\left(\frac{\sin(\alpha + \theta)}{\cancel{\cos \alpha}}\right) = C\left(\frac{\cos(\alpha + \phi)}{\cancel{\cos \alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow B = C \frac{\cos(\alpha + \phi)}{\sin(\alpha + \theta)} \quad \text{Hemos encontrado el módulo de B!}$$

$\rightarrow$ Reemplazamos este resultado en (4):

$$A = \frac{B \cos \theta + C \sin \phi}{\cos \alpha} = \frac{C \frac{\cos(\alpha + \phi)}{\sin(\alpha + \theta)} \cdot \cos \theta + C \sin \phi}{\cos \alpha}$$

$$\rightarrow A = \frac{\frac{C \cos(\alpha + \phi) \cos \theta + C \sin \phi \sin(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha + \theta)}}{\cos \alpha}$$

$$\rightarrow A = \frac{C(\cos(\alpha + \phi) \cos \theta + \sin \phi \sin(\alpha + \theta))}{\sin(\alpha + \theta) \cos \alpha}$$

$\rightarrow$ Volvemos sobre la definición de $\cos(\alpha + \phi)$ y $\sin(\alpha + \theta)$

$$\rightarrow A = \frac{C}{\sin(\alpha + \theta) \cos \alpha} [\cos \theta [\cos \alpha \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi] + \sin \phi [\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta]]$$

Desarrollamos:

$$A = \frac{C}{\cos \alpha \sin(\alpha + \theta)} \left(\cos \theta \cos \alpha \cos \phi - \cancel{\cos \theta \sin \alpha \sin \phi} + \cancel{\sin \phi \sin \alpha \cos \theta} + \sin \phi \cos \alpha \sin \theta \right)$$

$$A = \frac{C}{\cos \alpha \sin(\alpha + \theta)} \left(\underline{\cos \alpha \cos \theta \cos \phi} + \underline{\cos \alpha \sin \phi \sin \theta} \right)$$

factorizamos por $\cos \alpha$:

$$\rightarrow A = \frac{\cancel{\cos \alpha}}{\cancel{\cos \alpha} \sin(\alpha + \theta)} \left(\cos \theta \cos \phi + \sin \phi \sin \theta \right)$$

$$A = C \left(\frac{\cos \theta \cos \phi + \sin \phi \sin \theta}{\sin(\alpha + \theta)} \right)$$

$\rightarrow$ Reconocemos $\cos \theta \cos \phi + \sin \phi \sin \theta = \cos(\theta - \phi)$

$$\Rightarrow A = \frac{C \cos(\theta - \phi)}{\sin(\alpha + \theta)} \quad \text{Módulo de A!}$$

$\Rightarrow$ Tenemos finalmente, que el Módulo de A y B son:

$$A = \frac{C \cos(\theta - \phi)}{\sin(\alpha + \theta)}$$

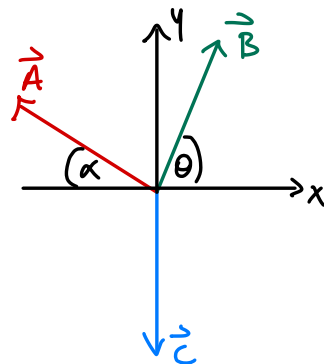
$$B = \frac{C \cos(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha + \theta)}$$

$\rightarrow$ Si $\phi \rightarrow 0$ El resultado queda como:

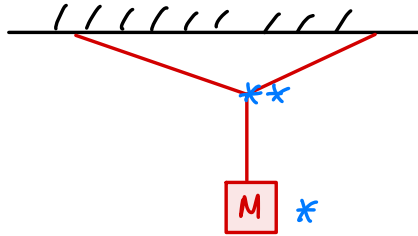
$$A = \frac{C \cos \theta}{\sin(\alpha + \theta)}$$

$$; \quad B = \frac{C \cos \alpha}{\sin(\alpha + \theta)}$$

$\rightarrow$ Gráficamente, los vectores se venían así:



- > En el contexto de dinámica, podríamos interpretar los vectores (cuando $\phi=0$) como un sistema donde un bloque cuelga sostenido por cuerdas:



Donde los vectores estarían asociados a las fuerzas de tensión que sostienen a la masa (en presencia de gravedad) en reposo.

→ la cond. de reposo se aplicaría en los puntos (*) y (**).



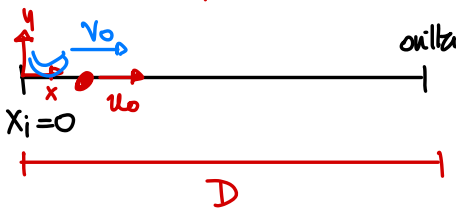
Comparamos la metodología usada en el aux 1:

1.- Intuición física y 2.- Eje coordenado:

•> Para efectuar el problema, sólo nos interesa lo que ocurre a partir del momento en que Braunie salta del bote y comienza a nadar.

→ Un esquema de lo que ocurre en el problema sería; por intervalos de tiempo sería:

definimos este sist. de referencia

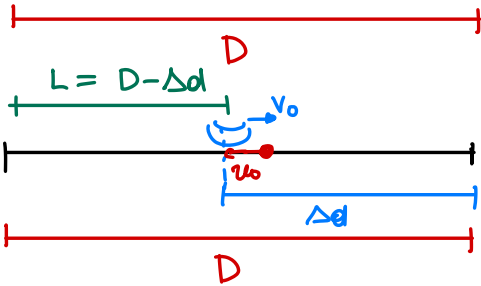


(I) Cuando parten:

- > Hay una distancia D [m] desconocida que separa a ambos de la oncha.
- > $x_i=0$ de ambos (por sist. de referencia)
- > Gabriela se mueve a v_0 [m/s] y Braunie a u_0 [m/s], conocidas y constantes.



(II) Brownie recorre D [m] en t_1 [s] (ambos desconocidos).



(III) En el instante en que se encuentran, Brownie recorre Δd [m] en t_2 [s], ambos desconocidos.

(IV) Si consideramos I, II y III juntos, Brownie recorrió todo en T [s] (conocido), y Gabriela recorrió (ver diagrama de III) $L = D - \Delta d$ [m] en T [s] (ambos se encuentran en el mismo instante de tiempo).

Obs: El tiempo T incluye a t_1 y t_2 !

Tenemos entonces lo siguiente:

O: incógnitas.

- (1.-) $X_i = 0$ cuando se separan (I).
- (2.-) Brownie se mueve con rapidez u_0 y Gabriela con v_0 .
- (3.-) Brownie recorre D [m] en t_1 [s].
- (4.-) Brownie recorre Δd [m] en t_2 [s].
- (5.-) Gabriela recorre $L = D - \Delta d$ [m] en T [s]
- (6.-) T incluye a t_1 y t_2 .

3.- Plantear ecuaciones: Como estamos en un problema 1D de velocidad constante, usamos

$$X_f = X_i + vt.$$

4.- Imponer condiciones e incógnitas:

→ Ecuación de itinerario para Browne:

$$X_f^B = X_i^B (\pm) u_0 t$$

↳ el signo depende de si va (+) o vuelve (-).

→ y para Gabriela:

$$X_f^G = X_i^G (+) V_0 t$$

→ Siempre se mueve hacia los positivos del sistema de referencia.

⇒ De (3), B recorre D en t_1 :

$$\rightarrow D = X_i (+) u_0 t_1$$

0 por sist. de ref.

→ Se mueve hacia los positivos

$$\rightarrow \boxed{D = u_0 t_1} \quad 1 \text{ ec. y 2 incógnitas.}$$

⇒ De (4), B recorre Δd en t_2 a rapidez $(-u_0)$ ← por sistema de referencia

Pero! Ojo, porque según el sistema de ref. que escogimos, la pos. final es $D - \Delta d$, y la pos. inicial es D (ver instante II):

$$\rightarrow D - \Delta d = D - u_0 t_2$$

$$\Rightarrow -\Delta d = -u_0 t_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta d = u_0 t_2} \quad 2 \text{ ecuaciones y 4 incógnitas.}$$

⇒ De (5), instante III, cuando se encuentran, Gabriela recorre $L = D - \Delta d$ [m] en T [s] (Aquí sí $X_f = D - \Delta d$ y $X_i = 0$ por el sist. de referencias).

$$\rightarrow D - \Delta d = X_i (+) V_0 T \Rightarrow \boxed{D - \Delta d = V_0 T} \quad 3 \text{ ecuaciones, 4 incógnitas}$$

⇒ Podemos obtener una 4ª ecuación recordando que T incluye a t_1 y t_2 , es decir:

$$T = t_1 + t_2$$

Tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas! Podemos resolver:

6- Despejamos incógnitas:

$$(i) D = u_0 t_1$$

$$(ii) \Delta d = u_0 t_2$$

$$(iii) D - \Delta d = V_0 T$$

$$(iv) T = t_1 + t_2$$

→ De (i) y (ii) podemos despejar t_1 y t_2 :

$$t_1 = \frac{D}{u_0}$$

$$t_2 = \frac{\Delta d}{u_0}$$

→ Reemplazando en (iv):

$$T = t_1 + t_2 = \frac{D}{u_0} + \frac{\Delta d}{u_0}$$

$$\rightarrow T = \frac{D + \Delta d}{u_0}$$

→ De esta última expresión despejamos D :

$$T = \frac{D + \Delta d}{u_0} \Rightarrow u_0 T = D + \Delta d \Rightarrow D = u_0 T - \Delta d$$

→ Y reemplazando en (iii)

$$D - \Delta d = V_0 T$$

$$u_0 T - \Delta d - \Delta d = v_0 T$$

$$\Rightarrow u_0 T - 2\Delta d = v_0 T$$

$$\Rightarrow 2\Delta d = u_0 T - v_0 T$$

$$\Rightarrow \Delta d = \frac{u_0 T - v_0 T}{2}$$

Factorizando por T :

$$\Rightarrow \Delta d = \frac{1}{2} (u_0 - v_0) T$$

→ Distancia de Gabriela a la oílla cuando se encuentra con Brownie.

→ Si evaluamos en $v_0 \sim 0$:

$$\Delta d = \frac{u_0 T}{2}$$

Significa que Brownie se demora $\frac{T}{2}$ [s] en ir y $\frac{T}{2}$ [s] en volver, ya que² Gabriela no se mueve de la pos. inicial.

→ Si evaluamos en $v_0 \sim u_0$:

$$\Delta d = 0$$

Si ambos van a la misma velocidad, siempre andan juntos y por lo tanto Brownie no alcanza a devolverse cuando ya se encontró con Gabriela.

Análisis dimensional

$$u_0 \sim \frac{L}{T}, v_0 \sim \frac{L}{T}$$

$$T \sim T$$

$$\rightarrow \Delta d \sim \left(\frac{L}{T} - \frac{L}{T} \right) T$$

$$\sim \frac{L}{T} \cdot T = L \checkmark$$

Corresponde a un largo.

→ La solución gráfica puede construirse de la siguiente manera.
 → En un gráfico de posición X [m] vs tiempo t [s] tendremos.

→ Gabriela y Braunie se separan en $t=0$ y $x_i=0$ y se encuentran a una distancia D de la oquilla.

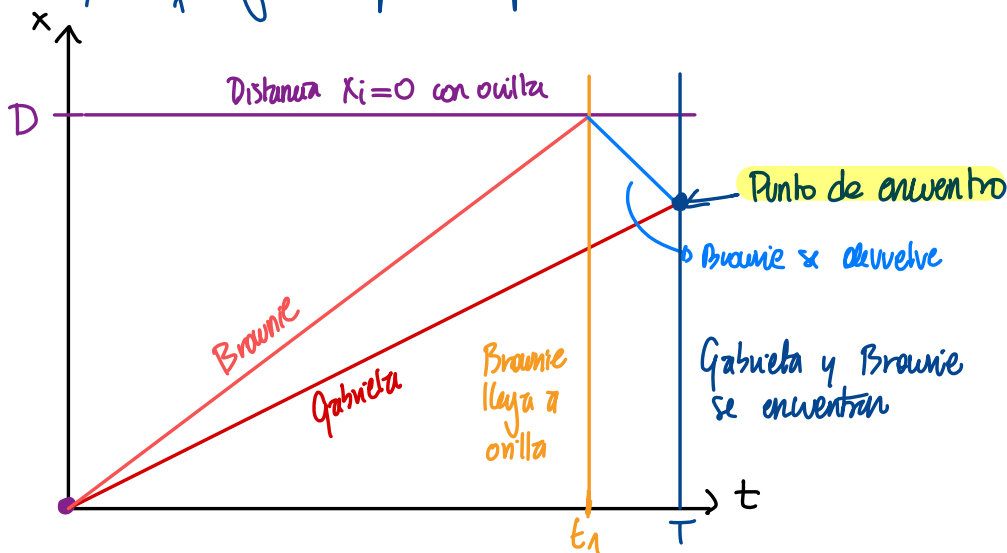
→ Gabriela se mueve a vel.cte $V_0 \Rightarrow$ la "ura" de su posición será una recta, pues la pendiente en gráfico de x vs t es $\frac{\Delta x}{\Delta t} = V_0$

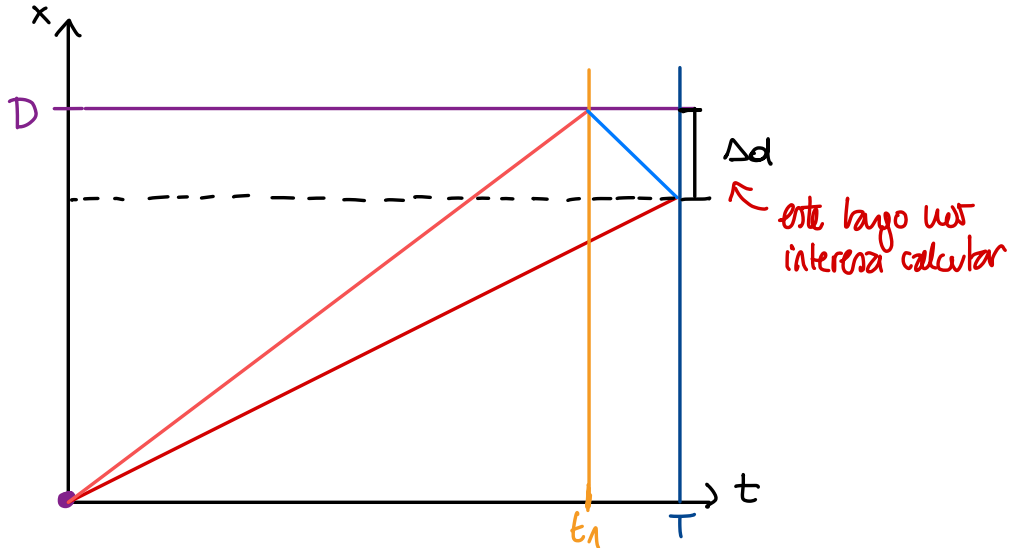
→ Lo mismo ocurre para Braunie. Como Braunie llega antes a la oquilla y vuelve, la rapidez de B es mayor que la de G, i.e. $u_0 > V_0$. En un gráfico esto se ve como que la recta asociada a la pos. de B es más empinada que la de G (pde. es mayor)

→ Cuando Braunie llega a la oquilla, han pasado t_1 [s] (que se puede representar como una vertical)

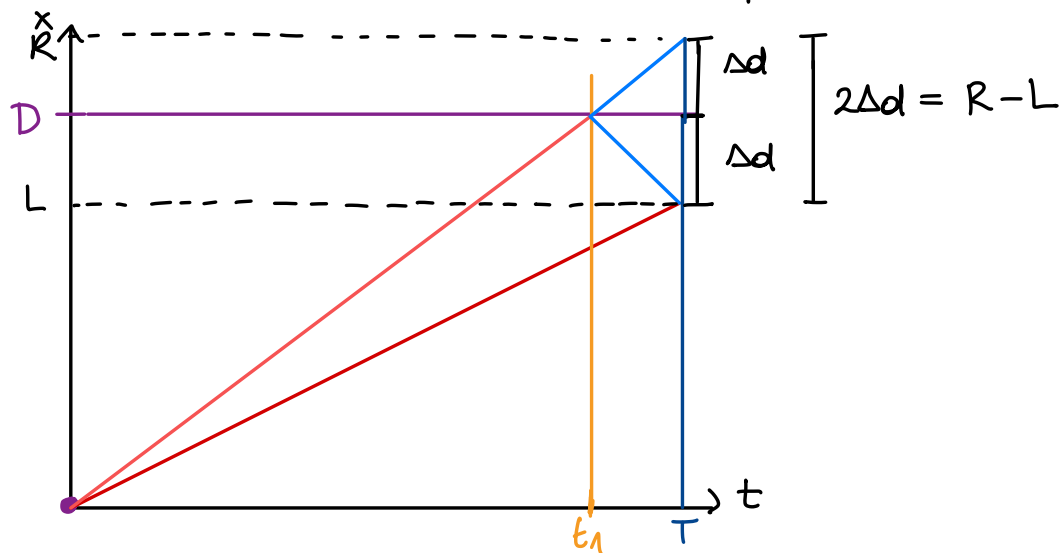
→ Luego de eso se devuelve (cambia la recta a una pendiente negativa $-u_0$)

→ Se encuentra con Gabriela (intersección de ambas rectas) en T , el que igual se puede representar como una vertical.





→ Extendemos recta de Brownie hasta el tiempo T y :



→ la distancia recorrida por Gabriela (airea bajo la curva) desde $t=0$ hasta $t=T$ es:

$$L = v_0 T$$

→ y la de Brownie es $R = v_0 T$

•> Del gráfico, se tiene que

$$2\Delta d = R - L \quad (\star)$$

Reemplazando $L = v_o T$ y $R = u_o T$ en $(\star)$:

$$2\Delta d = u_o T - v_o T$$

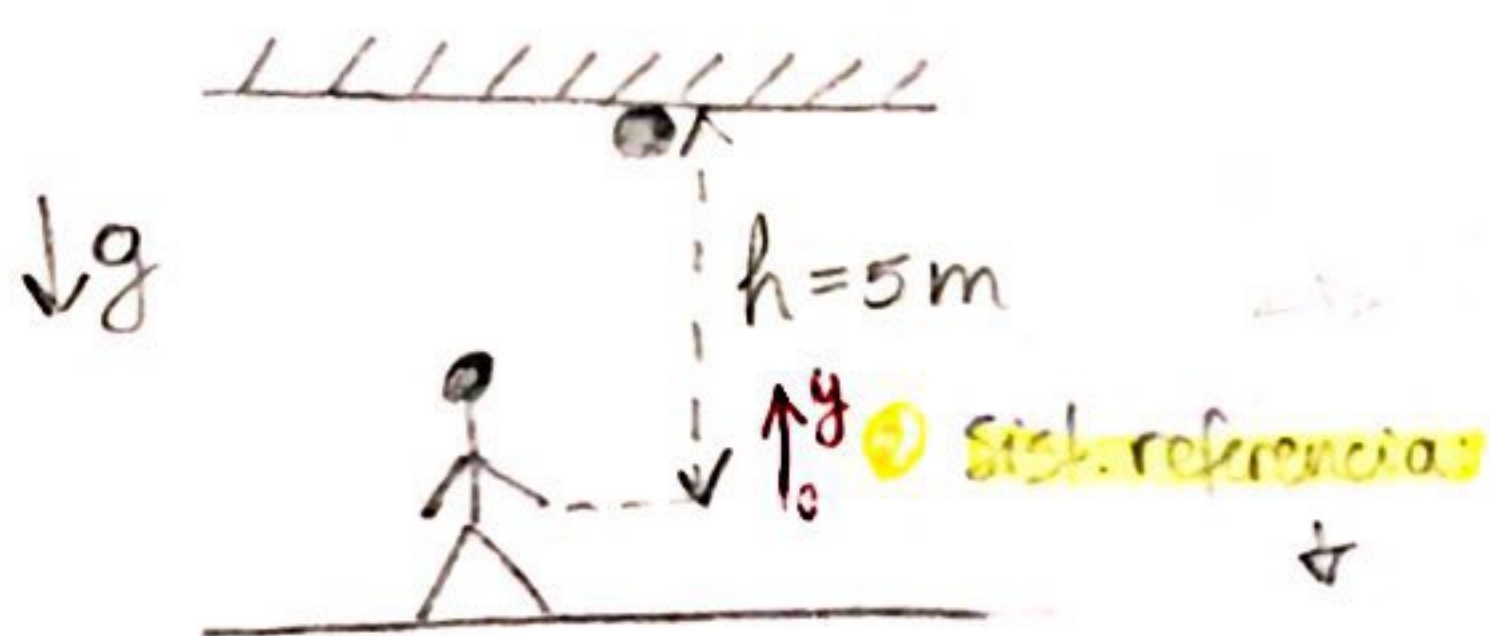
$$\rightarrow 2\Delta d = (u_o - v_o) T$$

$$\Rightarrow \Delta d = \frac{1}{2} (u_o - v_o) T$$

Que es el mismo resultado al que llegamos antes!

Éxito con el estudio 😊

Parte I



1 Datos del problema

- $h = 5 \text{ m}$ → La pelota recorre h en t .
- $v_f = 0 \text{ m/s}$ } En este tipo de problemas, cuando la partícula llega al punto más alto, su velocidad es 0.
- g cte.
- $v_i = ?$ $t = ?$

Fijamos el eje y de tal forma que la posición inicial de la pelota sea 0 $\Rightarrow$ el eje y se fija al nivel de las manos del malabarista.

2 planteamos ecuaciones

Como g es cte. usamos las ecs. para aceleración constante:

$$y_f = y_i + v_i t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

$$v_f = v_i - g t \quad (2)$$

* Los términos con g son negativos debido al sist. de referencia.

$\uparrow y$ $\Rightarrow$ positivo hacia arriba y como g apunta hacia abajo, es negativo.

4 Imponemos condiciones, reconocemos incógnitas:

$$(1) \cdot h = 0 + v_i t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h = v_i t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

$$(2) \cdot 0 = v_i - g t \Rightarrow v_i = g t \quad (2)$$

Tenemos 2 ecs. y 2 incógnitas (v_i, t)

5 Despejamos

Para encontrar la velocidad inicial, despejamos t de (2) y reemplazamos en (1):

$$(2) \cdot t = \frac{v_i}{g}$$

$$\rightarrow (1) \cdot h = \frac{v_i^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_i^2}{g^2} = \frac{v_i^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{g}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{g} \Rightarrow v_i = \sqrt{2 h g} \quad / \quad g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$h = 5 \text{ m}$$

$$v_i = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10} = \sqrt{100}$$

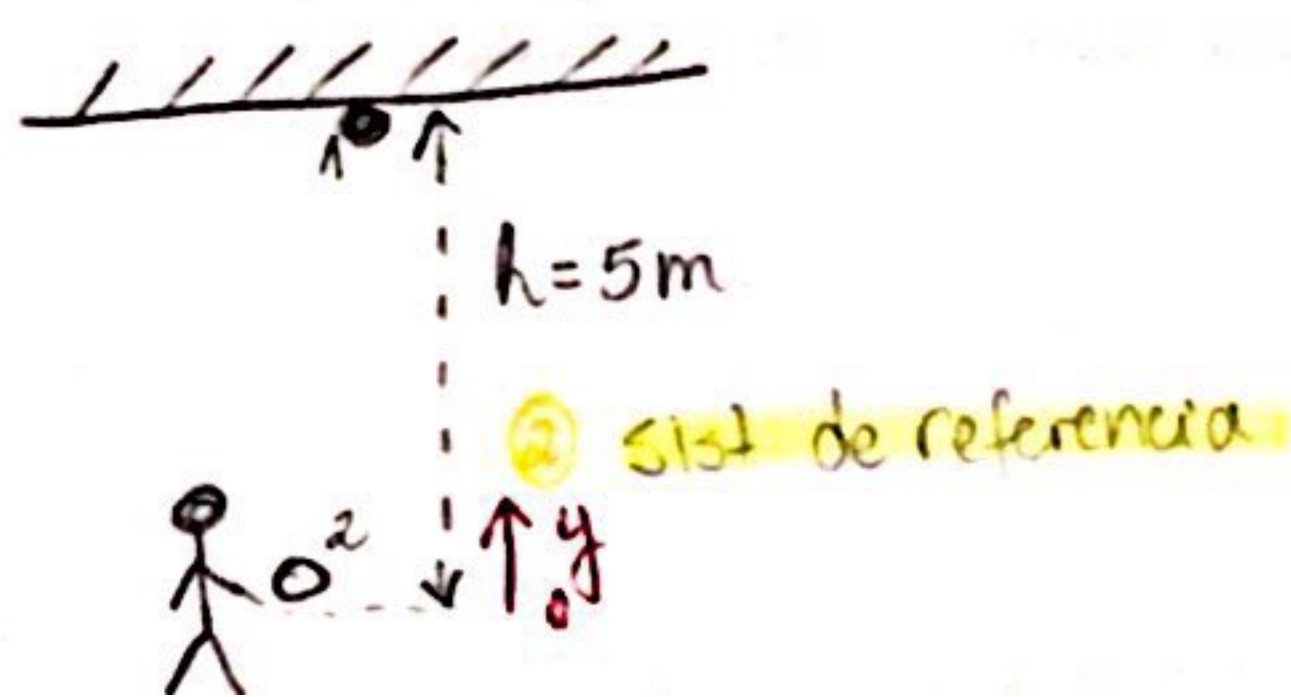
$$\therefore v_i = 10 \text{ m/s}$$

Para encontrar el tiempo que demora en llegar al techo, utilizamos la ec. (2):

$$(2) \cdot t = \frac{v_i}{g} = \frac{10 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} = 1 \text{ s} \quad \therefore t = 1 \text{ s}$$

Así, tenemos que la pelota recorrió 5 m en 1 s, partiendo con una velocidad de 10 m/s.

Parte II



1 Datos del problema

- Pelota 1.
- $v_{i1} = 0 \text{ m/s}$
- $y_{i1} = h \text{ m}$

- Pelota 2. $\rightarrow$ corresponde a la velocidad inicial de la pelota 1 de la parte I del problema.
- $v_{i2} = \frac{2}{3} v_i \text{ m/s}$
- $y_{i2} = 0 \text{ m}$

Encontrar t tal que $y_{f1} = y_{f2}$

Encontrar y_{f2}

Pelotas se cruzan.

③ Planteamos ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_f &= y_i + v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2 & (1) \\ v_f &= v_i - gt & (2) \end{aligned}$$

④ Imponemos condiciones, reconocemos incógnitas

• Pelota 1: (1): $y_{f1} = y_{i1} + v_{i1y}t - \frac{1}{2}gt^2$

$$y_{f1} = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (I)$$

$$\begin{aligned} (2): v_{f1} &= v_{i1} - gt \\ v_{f1} &= -gt \quad (II) \end{aligned}$$

• Pelota 2: (1): $y_{f2} = y_{i2} + v_{i2y}t - \frac{1}{2}gt^2$

$$y_{f2} = \frac{2}{3}v_{i2}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (III)$$

$$\begin{aligned} (2): v_{f2} &= v_{i2} - gt \\ v_{f2} &= \frac{2}{3}v_{i2} - gt \quad (IV) \end{aligned}$$

Tenemos 5 incógnitas y 4 ecs. ... PERO, la condición del enunciado nos permite agregar otra ecuación. $\rightarrow$ el cruce de las dos pelotas: $y_{f1} = y_{f2} \quad (V)$

⑤ Despejamos

Para encontrar el tiempo que tardan en encontrarse las pelotas:

Reemplazamos I y II en V: $h - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{2}{3}v_{i2}t - \frac{1}{2}gt^2$

$$\begin{aligned} h &= \frac{2}{3}v_{i2}t \Rightarrow t = \frac{3h}{2v_{i2}} \quad / \quad \begin{matrix} h = 5 \text{ m} \\ v_{i2} = 10 \text{ m/s} \end{matrix} \\ \therefore t &= 0.75 \text{ s} \end{aligned}$$

Para calcular la altura en la que se encuentran las pelotas:

solo basta con reemplazar t en I ó III:

$$\begin{aligned} t \text{ en I: } y_{f1} &= h - \frac{1}{2}g \cdot \frac{9h^2}{4v_{i2}^2} = 5 - \frac{9}{8} \cdot 10 \cdot \frac{25}{100} = 5 - \frac{9}{8} \cdot 2.5 = 2.19 \text{ m} \\ \therefore y_{f1} &= 2.19 \text{ m} \end{aligned}$$

//